

专升本高等数学科目 题型及考情分析

一、高等数学科目题型分析

高等数学作为成人高考专升本经管类（高数二）、理工类（高数一）专业考察科目，二者考试的题型都相同，包括如下表所示：

题型	题数	每题分值	总共分值
一、选择题	共 10 小题	4 分	40 分
二、填空题	共 10 小题	4 分	40 分
三、解答题	共 8 小题	8-10 分	70 分

二、高等数学科目考情分析

（一）、考试比重分析

数学科目总分为 150 分，其中单选题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。填空题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。简答题共 8 小题，每小题 8-10 分，共 70 分。

不管是从年份，还是从省份来看，专升本经管类、理工科的录取分数线一般都是维持在 100-130 分左右，所以我们参考的学生只要三科总分达到 150 分以上，平均到每门科目上只需要 50 分，考过是没有问题的。高等数学这门科目，对于很多参考的学员来说是一座大山，很多学员数学基础都相对比较差，考试基本考蒙，甚至是不写，直接填完选择题就交卷，战略上完全放弃了这门科目，其实这种方法是不可取的，高等数学这门科目实际在学习的过程中你会发现，完全是可以拿到高分的，最怕的是还没开始就打退堂的学员，因为成人高考作为一种基本的水平性的测试，试卷考察的内容都比较浅显和简单。只要用心、静心、耐心去学，不愁拿不到高分。通过高等数学的直播课会教大家，常考的题型和对应的解题思路，直播课下来，你会发现有不一样的收获。

（二）、考点分析

由于高数一和高数二在大体知识点上差异不大，所以我们会放在一起讲，只有个别细微的知识点我们会单独标出，比如概率分布就是高数二的学员要考察，而高数一的学员不需要考察，大家只要对考点熟悉，常用的定理、公式记住，那么做题就很轻松，因为每年基本的题目分值就占到了 110-120 分，所以基础的题目把握了，考试就很轻松了。那么我们一起来看下考试的知识点。

三、高等数学各部分考情分析

(一) 单项选择题

本部分共计 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，下面我们一起来梳理单项选择题的考试知识点和真题解析。高等数学的选择题相对来说考的知识点比较浅显，所以大家在复习的过程中要以基础知识点为主，切莫钻牛角尖，去研究很难很偏的题目，只要做好基础知识点的掌握，这个板块大家是可以拿到 30-36 分的。

首先，我们来看选择题的第一个考点，这个考点是高频考点，选择题考了就会考一个，了解以下知识点，可以帮你快速突破这个选择题。

(1) 考察无穷小量及无穷大量定义及性质

无穷小量定义：对于函数 $y=f(x)$ ，如果自变量 x 在某个变化过程中，函数 $f(x)$ 的极限为 0，则称在该变化过程中， $f(x)$ 为无穷小量，一般记作

$$\lim f(x) = 0$$

即在一般情况下，极限号下的变化过程可以省略，但如果指出了具体的变化过程（如 $x \rightarrow \dots$ ），则应注明变化过程。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

注意：

- ① 不要把一个很小很小的数误认为是无穷小量。
- ② 无穷小量是一个变量，是在某个变化过程中以 0 为极限的变量，即在某个变化过程中，变量的绝对值可以无限地变小，且以 0 为极限。
- ③ 不要笼统地说某个变量是无穷小量，必须说明在什么变化过程中它是无穷小量。

无穷大量定义：对于函数 $y=f(x)$ ，如果自变量 x 在某个变化过程中，函数 $f(x)$ 的极限值越来越大，称在该变化过程中， $f(x)$ 为无穷大量，一般记作

$$\lim f(x) = \infty$$

即在一般情况下，极限号下的变化过程可以省略，但如果指出了具体的变化过程（如 $x \rightarrow \dots$ ），则应注明变化过程。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

无穷小量的性质:

性质 1 有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量.

性质 2 无穷小量与有界变量的积仍是无穷小量.

例如:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \text{ (无穷小量)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ (有界变量)} = 0 \text{ (无穷小量)}$$

无穷小量与无穷大量的关系:

在同一变化过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大量, 且 $f(x) \neq 0$.

则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小量; 反之, 如果 $f(x)$ 为无穷小量, 且 $f(x) \neq 0$.

则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

$$\text{例如: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

以下是我们历年考试的真题, 我们可以进行练习下, 掌握上面的知识点, 可以帮你快速突破这些真题.

【真题解析】

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列变量是无穷小量的为 ()

A. $\frac{1}{x^2}$ B. 2^x C. $\sin x$ D. $\ln(x+e)$

【答案解析】 只要根据定义, 看当 $x \rightarrow 0$ 时, 那个函数的极限值为 0, 即是答案.

$$A: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

$$B: \lim_{x \rightarrow 0} 2^x = 1$$

$$C: \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

$$D: \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+e) = 1$$

所以正确答案为 C.

2. 下列变量在给定的变化过程中是无穷小量的是 ()

A. $\frac{\sin x}{x} (x \rightarrow 0)$ B. $2^{-x} - 2 (x \rightarrow 0)$ C. $\frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}} (x \rightarrow +\infty)$ D. $x \cdot \sin \frac{1}{x} (x \rightarrow 0)$

【答案解析】

$$A: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$B: \lim_{x \rightarrow 0} 2^{-x} - 2 = -1$$

$$C: \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}} = 1$$

$$D: \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$$

所以正确答案为D.

接下来，我们来看选择题的第二个考点，这个考点也是高频考点，选择题考了就会考一个，了解以下知识点，可以帮你快速突破这个选择题。

(2) 考察无穷小量的比较及替换

定义：设 α, β 是同一变化过程中的无穷小量，即

$$\lim \alpha = 0, \lim \beta = 0$$

(1) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ ，则称 β 是比 α 较高阶的无穷小量，记作 $\beta = o(\alpha)$

(2) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 1$ ，则称 β 是与 α 同阶的无穷小量.

(3) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ ，则称 β 与 α 是等价的无穷小量.

(4) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ ，则称 β 是比 α 较低阶的无穷小量.

等价无穷小的代换：

$$\text{设 } a \sim a', b \sim b', \text{ 则 } \lim \frac{a}{b} = \lim \frac{a'}{b'}$$

在求极限的过程中，经常用到下列一些等价的无穷小量

$$\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x)$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x + x^2 + x^3 + x^4$ 为 x 的

- A. 等价无穷小 B. 2阶无穷小
C. 3阶无穷小 D. 4阶无穷小

【答案解析】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 + x^3 + x^4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x + x^2 + x^3) = 1$$

\Rightarrow 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x + x^2 + x^3 + x^4$ 为 x 的等价无穷小

$\Rightarrow A$

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列各无穷小量中与 x^2 等价的是 ()

- A. $x \sin^2 x$ B. $x \cos^2 x$ C. $x \sin x$ D. $x \cos x$

【答案解析】 只要根据定义, 看当 $x \rightarrow 0$ 时, x^2 与那个函数相比的极限值为 1, 即是与 x^2 等价的.

$$A: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} = 0$$

$$B: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 x} = 0$$

$$C: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$D: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x} = 0$$

所以正确答案为 C.

3. 设 $b \neq 0$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin bx$ 是 x^2 的 ()

- A. 高阶无穷小量 B. 等价无穷小量 C. 同阶但不等价无穷小量 D. 低阶无穷小量

【答案解析】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin bx}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{x^2} \text{ (等价无穷小替换)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b}{x} = b \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

$= \infty$

所以正确答案为 D.

4. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin 3x$ 是 $2x$ 的 ()

A. 低阶无穷小量 B. 等价无穷小量 C. 同阶但不等价无穷小量 D. 高阶无穷小量

【答案解析】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2} \neq 1 \text{ (等价无穷小替换)}$$

所以正确答案为 C.

第三个考点相对来说在选择题里面出来的可能性也比较大, 主要牵涉到重要极限及变形。

(3) 两个重要极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

扩充一般形式

$$\lim_{\partial(x) \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\partial(x)} = 1$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

也可扩充为一般形式

$$\lim_{\partial(x) \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{\partial(x)}\right]^{\partial(x)} = e$$

$$\lim_{\partial(x) \rightarrow 0} \left[1 + \partial(x)\right]^{\frac{1}{\partial(x)}} = e$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^x = ()$$

$$A.e B.e^{-1} C.e^2 D.e^{-2}$$

【答案解析】

重要极限 (2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^{\frac{x}{2} \cdot 2} = e^2$$

答案: C

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^x = ()$$

$$A.e B.e^{-1} C.e^2 D.e^{-2}$$

【答案解析】

重要极限 (2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^{\frac{x}{2} \cdot 2} = e^2$$

答案: C

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{2x} = ()$$

$$A.e^{-2} B.e^{-1} C.e D.e^2$$

【答案解析】

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{x \cdot 2} = e^2$$

答案选D

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} =$$

$$A.0 B.1 C.2 D.\infty$$

【答案解析】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin x}{x})^2 = 1$$

答案选B

第四个考点相对来说在选择题里面是必考点，主要牵涉到求极限得几种方法。

(4) 求极限方法

①直接带入法：分母不为零的可以通过极限的四则运算法则直接带入求解。

函数极限的四则运算定理：

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0 \text{ 时,}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B}$$

②利用无穷小量的性质求极限（前面已讲）

③利用等价无穷小量代换求极限（前面已讲）

④利用两个重要极限求极限（前面已讲）

⑤洛必达求导法则（导数部分详细叙述）

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 - 2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

A.0 B.1 C.2 D.3

【答案解析】C

这里由于分母不为零，所以直接把 $x=1$ 代入

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 - 2} = \frac{1 - 5 + 2}{1 - 2} = 2$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2+1} = \underline{\hspace{2cm}}$$

A.0 B. $\frac{1}{2}$ C.1 D.2

【答案解析】A

这里由于分母不为零，所以直接把 $x=-1$ 代入

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{-1+1}{1+1} = 0$$

第五个考点相对来说在选择题里面是高频点，主要考察函数在某一点的连续性。

(5) 函数连续性

① 函数在某一点上的连续性

定义1: 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义, 如果有自变量 Δx (初值为 x_0) 趋近于0时, 相应的函数改变量 Δy 也趋近于0, 即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续.

定义2: 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义, 如果当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限值存在, 且等于 x_0 处的函数值 $f(x_0)$, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续.

以下是我们历年考试的真题, 我们可以进行练习下, 掌握上面的知识点, 可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则常数 $a = (\quad)$

A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

【答案解析】B

运用定义 (2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}e^{-x} = f(0) = a$$

$$\frac{1}{2} = a$$

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ x + a, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a = (\quad)$

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

【答案解析】C

连续定义: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + a) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x$$

$$0 + a = e^0 = 1$$

$$a = 1$$



第六个考点相对来说在选择题里面是高频考点，主要牵涉到导数定义公式及变形公式。

(6) 导数定义公式

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，若自变量 x 在点 x_0 处的改变量为 Δx ($x_0 + \Delta x$ 仍在该领域内).函数 $y = f(x)$ 相应地有改变量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ 存在}$$

则此极限值为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数.记作 $y'|_{x=x_0}$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ 或 $f'(x_0)$.

$$\text{即 } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 下列函数中，在 $x = 0$ 处不可导的是 ()

$$A. y = \sqrt[3]{x^5} \quad B. y = \sqrt[5]{x^3} \quad C. y = \sin x \quad D. y = x^2$$

【答案解析】 B

当 $x = 0$ 处可导 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ 的极限值存在.

$$A: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{5}{3}} - 0}{x} = x^{\frac{2}{3}} = 0$$

$$B: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{3}{5}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{5}}} = +\infty$$

$$C: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 0}{x} = 1$$

$$D: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0}{x} = 0$$

2. 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(1+x) - f(1)} = 2$, 则 $f'(1) = (\quad)$

A. 2 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. 0

【答案解析】 C

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(1+x) - f(1)}} = \frac{1}{2}$$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $f'(1) = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x) - f(1)}{x} = (\quad)$

A. -2 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2

【答案解析】 A

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x) - f(1)}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x) - f(1)}{1-x-1} = -f'(1) = -2$$

4. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个领域内可导, 且 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+2h) - f(x_0)}{h} = (\quad)$

A. -2 B. 0 C. 1 D. 2

【答案解析】 C

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+2h) - f(x_0)}{h} = 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+2h) - f(x_0)}{2h} = 2f'(x_0) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

第七个考点相对来说在选择题里面是高频考点，主要牵涉到导数集合意义求切线方程。

(7) 导数的几何意义

导数的几何意义：函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线斜率

曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线方程为 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的法线方程为 $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

1. 曲线 $y = e^{2x} - 4x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程是 ()

A. $2x - y - 1 = 0$ B. $2x + y - 1 = 0$ C. $2x - y + 1 = 0$ D. $2x + y + 1 = 0$

【答案解析】 B

切线斜率 $k = y'|_{x=0} = (2e^{2x} - 4)|_{x=0} = -2$

即切线方程为 $y - 1 = -2x \Rightarrow y + 2x - 1 = 0$

2. 曲线 $y = x^3 + 2x$ 在点 $(1, 3)$ 处的法线方程是

A. $5x + y - 8 = 0$ B. $5x - y - 2 = 0$

C. $x + 5y - 16 = 0$ D. $x - 5y + 14 = 0$

【答案解析】

$y' = 3x^2 + 2 \Rightarrow k_{\text{切}} = y'(1) = 3 + 2 = 5$

法线方程为： $y - 3 = -\frac{1}{k_{\text{切}}}(x - 1)$

$\Rightarrow x + 5y - 16 = 0 \Rightarrow C$

第八个考点相对来说在选择题里面是必考点，主要利用基本初等函数公式和导数四则运算法则求导。

(8) 求导方法.

①基本初等函数导数公式

$$1. (c)' = 0$$

$$2. (x^a)' = ax^{a-1}$$

$$3. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, \text{且} a \neq 1)$$

$$4. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$5. (a^x)' = a^x \ln a$$

$$6. (e^x)' = e^x$$

$$7. (\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x$$

$$8. (\tan x)' = \sec^2 x, (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$9. (\sec x)' = \sec x \tan x, (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$10. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

$$11. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

$$12. (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$13. (\operatorname{arc cot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

②导数的四则运算法则

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

3. $(cu)' = cu'$ (c 为常数)

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ ($v \neq 0$)

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 设函数 $f(x) = x \ln x$ ，则 $f'(e) = (\quad)$

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

【答案解析】 D

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \Rightarrow f'(e) = \ln e + 1 + 1 = 2$$

2. 若函数 $f(x) = 5^x$ ，则 $f'(x) =$

A. 5^{x-1} B. $x5^{x-1}$ C. $5^x \ln 5$ D. 5^x

【答案解析】

利用基本初等函数求导公式属于指数函数类型

$$f'(x) = 5^x \ln 5 \Rightarrow C$$

3. 设函数 $y = \arcsin x$ ，则 $y' =$

A. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ B. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ C. $-\frac{1}{1+x^2}$ D. $\frac{1}{1+x^2}$

【答案解析】 由于 y 是基本初等函数里的反三角函数

$$\text{直接带入公式得 } y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow B$$

③复合函数求导

如果函数 $u = \alpha(x)$ 在点 x 处可导, 函数 $y = f(u)$ 在对应点 u 处也可导, 则复合函数 $y = f[\alpha(x)]$ 在点 x 处可导, 且有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

$$\{f[\alpha(x)]\}' = f'(u) \cdot u'(x)$$

以下是我们历年考试的真题, 我们可以进行练习下, 掌握上面的知识点, 可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 设函数 $y = (2+x)^3$, 则 $y' = ()$

A. $(2+x)^2$ B. $3(2+x)^2$ C. $(2+x)^4$ D. $3(2+x)^4$

【答案解析】 B

$$y = (2+x)^3$$

$$y' = 3(2+x)^2 \cdot (2+x)' = 3(2+x)^2$$

2. 设函数 $y = \cos 2x$, 则 $y' =$

A. $2 \sin 2x$ B. $-2 \sin 2x$ C. $\sin 2x$ D. $-\sin 2x$

【答案解析】

$$y' = -\sin 2x \cdot (2x)' = -2 \sin 2x \Rightarrow B$$

④高阶求导

如果函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍是 x 的可导函数,那么就称 $f'(x)$ 的导数为 $f(x)$ 的二阶导数,相应地 $f'(x)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的一阶导数.二阶导数记为 y'' , $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ 或 $\frac{d^2f}{dx^2}$

$$y''=(y')', f''(x)=[f'(x)]' \text{ 或 } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

那么以此类推, $f(x)$ 得 $n-1$ 阶导数的导数称为 $f(x)$ 的 n 阶导数

$$\text{记作 } y^{(n)} \text{ 或 } y^{(n)}(x) \text{ 或 } \frac{d^n y}{dx^n}$$

以下是我们历年考试的真题,我们可以进行练习下,掌握上面的知识点,可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 设函数 $y=3x+1$, 则 $y''=()$

A.0 B.1 C.2 D.3

【答案解析】 A

$$y=3x+1 \Rightarrow y'=3 \Rightarrow y''=0$$

2. 设函数 $y=x^3+e^x$, 则 $y^{(4)}=()$

A.0 B. e^x C. $2+e^x$ D. $6+e^x$

【答案解析】

$$y'=3x^2+e^x \Rightarrow y''=6x+e^x$$

$$\Rightarrow y'''=6+e^x \Rightarrow y^{(4)}=e^x$$

$\Rightarrow B$

第九个考点相对来说在选择题里面是必考点，主要牵涉到求基本的微分。

(9) 微分

微分公式：

$$(1) d(c) = 0 (c \text{ 为常数}) . (2) d(x^a) = ax^{a-1} dx$$

$$(3) d(a^x) = a^x \ln a dx (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$$

$$(4) d(e^x) = e^x dx . (5) d \log_a x = \frac{1}{x \ln a} dx (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$$

$$(6) d(\ln x) = \frac{1}{x} dx . (7) d(\sin x) = \cos x dx$$

$$(8) d(\cos x) = -\sin x dx$$

函数的和、差、积、商微分运算公式

设 $u = u(x), v = v(x)$ 可微分，则

$$d(cu) = cdu (c \text{ 为常数}) ; d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$d(uv) = vdu + udv ; d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2} (v \neq 0)$$

函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的微分，常记作 $dy|_{x=x_0}$ 或 $df(x)|_{x=x_0}$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \Rightarrow dy = f'(x) dx$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 设函数 $y = e^{x-2}$ ，则 $dy = ()$

A. $e^{x-3} dx$ B. $e^{x-2} dx$ C. $e^{x-1} dx$ D. $e^x dx$

【答案解析】

$$y' = \frac{dy}{dx} = e^{x-2} \Rightarrow dy = e^{x-2} dx$$

2. $d(\sin 2x) = \underline{\hspace{2cm}}$

A. $2 \cos 2x dx$ B. $\cos 2x dx$ C. $-2 \cos 2x dx$ D. $-\cos 2x dx$

【答案解析】 A

$$\text{令 } y = \sin 2x \Rightarrow y' = 2 \cos 2x \Rightarrow dy = d(\sin 2x) = 2 \cos 2x dx$$

3. 若 $y = 1 + \cos x$ ，则 $dy =$

A. $(1 + \sin x) dx$ B. $(1 - \sin x) dx$ C. $\sin x dx$ D. $-\sin x dx$

【答案解析】

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\sin x \Rightarrow dy = -\sin x dx \Rightarrow D$$

第十个考点相对来说在选择题里面是高频考点，主要牵涉到求函数单调性和单调区间。

(10) 导数的应用

① 函数单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导.

- 1.如果在区间 (a,b) 内 $f'(x) > 0$,则函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是递增的;
- 2.如果在区间 (a,b) 内 $f'(x) < 0$,则函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是递减的。

注： $f(x)$ 在个别点处 $f'(x) = 0$ 不影响 $f(x)$ 的单调性.

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.函数 $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$ 的单调递减区间是 ()

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-1, 0)$ C. $(0, 1)$ D. $(1, +\infty)$

【答案解析】A

$$f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2} = \frac{2x+2}{(x+1)^2+1}, \text{由于}(x+1)^2+1 \text{恒} \geq 1$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow x < -1, \text{所以单调减区间是 } (-\infty, -1)$$

2.函数 $f(x) = x^3 - 12x + 1$ 的单调减区间为 ()

- A. $(-\infty, +\infty)$ B. $(-\infty, -2)$ C. $(-2, 2)$ D. $(2, +\infty)$

【答案解析】C

$$f'(x) = 3x^2 - 12, f'(x) < 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 < 0 \Rightarrow -2 < x < 2$$

函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(-2, 2)$

3.函数 $f(x) = x^4 - 4x$ 的单调增区间是 ()

- A. $(-\infty, +\infty)$ B. $(-\infty, 0)$ C. $(-1, 1)$ D. $(1, +\infty)$

【答案解析】D

$$f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1), \text{令} f'(x) = 0 \text{得} x = 1, \text{当} x > 1 \text{时}, f'(x) > 0$$

函数 $f(x)$ 的单调增区间是 $(1, +\infty)$

②函数的极值

设 $f(x)$ 在 x_0 的某领域内有定义.

(1) 如果 $x \neq x_0$ 时, 恒有 $f(x) < f(x_0)$ 则称 x_0 为极大值点, $f(x_0)$ 为极大值

(2) 如果 $x \neq x_0$ 时, 恒有 $f(x) > f(x_0)$ 则称 x_0 为极小值点, $f(x_0)$ 为极小值

极值存在的必要条件:

设函数 $f(x)$ 在 x_0 可导, 且在点 x_0 处取得极值, 则必有

$f'(x_0) = 0$, 称满足 $f'(x_0) = 0$ 的点为函数 $f(x)$ 的驻点,

由此可知, 可导函数的极值点必为驻点。

以下是我们历年考试的真题, 我们可以进行练习下, 掌握上面的知识点, 可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 的极小值点为 ()

A. -2 B. 0 C. 2 D. 4

【答案解析】

$f'(x) = 3x^2 - 3$, 令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x_1 = -1, x_2 = 1$

又 $f''(x) = 6x, f''(-1) = -6 < 0, f''(1) = 6 > 0$

所以函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值, $f(1) = -2$

2. 设 $f'(x_0) = 0$, 则 $x = x_0$ _____

A. 为 $f(x)$ 的驻点 B. 不为 $f(x)$ 的驻点 C. 为 $f(x)$ 的极大值点 D. 为 $f(x)$ 的极小值点

【答案解析】 A

使得函数得一阶导数得值为零得点, 称为函数得驻点, 即 $f'(x_0) = 0$ 得根为驻点

.驻点不一定是极值点。

③曲线的凹凸性及拐点

曲线凹凸性的判别法:

设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数, 那么

(1) 若在 (a,b) 内, $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的

(2) 若在 (a,b) 内, $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的

曲线的拐点:

在连续的曲线上的凹弧与凸弧之间的分界点称为曲线的拐点。

以下是我们历年考试的真题, 我们可以进行练习下, 掌握上面的知识点, 可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 曲线 $y = x^3 - 3x^2 - 1$ 的凸区间是 ()

A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, 2)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$

【答案解析】 A

函数得定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $y' = 3x^2 - 6x$, $y'' = 6x - 6$

令 $y'' = 6x - 6 < 0 \Rightarrow x < 1$, 曲线是凸的。

第十一个考点相对来说在选择题里面是必考点，主要牵涉到求不定积分。

(11) 不定积分的性质及公式

区间上 $f(x)$ 的原函数的全体，称为 $f(x)$ 在 I 上的不定积分记为 $\int f(x)dx$ 。

如果 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则有 $\int f(x)dx = F(x) + C$ ，其中 C 为任意常数。

不定积分的性质及公式

$$(1) \left[\int f(x) dx \right]' = f(x), d \int f(x) dx = f(x) dx$$

$$(2) \int dF(x) = F(x) + C, \int F'(x) dx = F(x) + C$$

$$(3) \int kf(x) dx = k \int f(x) dx (k \text{ 为常数})$$

$$(4) \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$(1) \int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C (a \neq -1)$$

$$(2) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$(3) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$$

$$(4) \int e^x dx = e^x + C$$

$$(5) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$(6) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(7) \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$(8) \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$(9) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$(10) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$(11) \int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$(12) \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$



以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 下列函数为 $f(x) = e^{2x}$ 的原函数的是 ()

A. e^x B. $\frac{1}{2}e^{2x}$ C. e^{2x} D. $2e^{2x}$

【答案解析】 B

$$\int f(x)dx = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C \quad (C \text{ 为任意常数})$$

2. 设 $2x$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x) =$

A. 0 B. $2C$ C. x^2 D. $x^2 + C$

【答案解析】

由题意可得 $\int f(x)dx = 2x + C$

$$\Rightarrow f(x) = (\int f(x)dx)' = (2x + C)' = 2$$

$\Rightarrow B$

3. $\int xdx = ()$

A. $2x^2 + C$ B. $x^2 + C$ C. $\frac{1}{2}x^2 + C$ D. $x + C$

【答案解析】 C

$$\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx = ()$

A. $\frac{2}{\sqrt{x}} + C$ B. $-\frac{2}{\sqrt{x}} + C$ C. $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$ D. $-\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

【答案解析】 B

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx = \int x^{-\frac{3}{2}}dx = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$$

5. $\int (x^{-2} + \sin x)dx = ()$

A. $-2x^{-1} + \cos x + C$ B. $-2x^{-3} + \cos x + C$ C. $-\frac{x^{-3}}{3} - \cos x + C$ D. $-x^{-1} - \cos x + C$

【答案解析】 D

$$\int (x^{-2} + \sin x)dx = \int x^{-2}dx + \int \sin xdx = -x^{-1} - \cos x + C$$

$$6. \int \frac{1}{2-x} dx =$$

$$A. \ln|2-x| + C \quad B. -\ln|2-x| + C$$

$$C. -\frac{1}{(2-x)^2} + C \quad D. \frac{1}{(2-x)^2} + C$$

【答案解析】

$$\int \frac{1}{2-x} dx = -\ln|2-x| + C \Rightarrow B$$

$$7. \text{设函数 } f(x) = \arctan x, \text{ 则 } \int f'(x) dx =$$

$$A. -\arctan x + C \quad B. -\frac{1}{1+x^2} + C$$

$$C. \arctan x + C \quad D. \frac{1}{1+x^2} + C$$

【答案解析】

$$\int f'(x) dx = f(x) + C = \arctan x + C \Rightarrow C$$

$$8. \frac{d}{dx} \int \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$A. \arctan x \quad B. \operatorname{arc} \cot x \quad C. \frac{1}{1+x^2} \quad D. 0$$

【答案解析】

$$\frac{d}{dx} \int \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow C$$

第十二个考点相对来说在选择题里面是一般考点，一般考察解答题，选择题里很少。

(12) 求不定积分的常用方法

一、换元积分法（凑微分法）

设 $f(u)$ 有原函数 $F(u)$ ，且 $u = v(x)$ ，则 $F[v(x)]$ 是 $f[v(x)]v'(x)$ 的原函数，即有：

$$\int f[v(x)]v'(x)dx = F[v(x)] + C$$

二、分部积分法

设 u 、 v 都是 x 的可微函数，则有

$$\int u dv = uv - \int v du$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

$$1. \int x \cos x^2 dx = ()$$

$$A. -2 \sin x^2 + C \quad B. -\frac{1}{2} \sin x^2 + C \quad C. 2 \sin x^2 + C \quad D. \frac{1}{2} \sin x^2 + C$$

【答案解析】D

$$\int x \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int \cos x^2 dx^2 = \frac{1}{2} \sin x^2 + C$$

$$2. \int x^2 e^{x^3} dx = ()$$

$$A. \frac{1}{3} x^2 e^{x^3} + C \quad B. 3x^2 e^{x^3} + C \quad C. \frac{1}{3} e^{x^3} + C \quad D. 3e^{x^3} + C$$

【答案解析】C

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} e^{x^3} dx^3 = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

$$3. \int f'(2x) dx =$$

$$A. \frac{1}{2} f(2x) + C \quad B. f(2x) + C \quad C. 2f(2x) + C \quad D. \frac{1}{2} f(x) + C$$

【答案解析】

$$\frac{1}{2} \int f'(2x) d(2x) = \frac{1}{2} f(2x) + C \Rightarrow A$$

$$4. \int \cos 2x dx =$$

$$A. \frac{1}{2} \sin 2x + C \quad B. -\frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$C. \frac{1}{2} \cos 2x + C \quad D. -\frac{1}{2} \cos 2x + C$$

【答案解析】

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2} \sin 2x + C \Rightarrow A$$

第十三个考点相对来说在选择题里面是必考点，主要牵涉到求定积分。

(13) 定积分

$\int_a^b f(x)dx$ 称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

其中 $f(x)$ 称为被积函数, $f(x)dx$ 称为被积表达式, x 称为积分变量, $[a,b]$ 称为积分区间, a 称为积分下限, b 称为积分上限.

注意:

(1) 定积分若存在, 它只是一个确定的常数, 它只与被积函数 $f(x)$ 及积分区间 $[a,b]$ 有关, 而与积分变量的符号无关, 即应有 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

(2) 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 中, 上下限的大小没有限制, 但若颠倒积分上下限, 必须改变定积分的符号, 即 $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.特别地有 $\int_a^a f(x)dx = 0$

1.常数可以提到积分号之外, 即若 k 为常数, 则有 $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

2.两函数代数和的定积分等于它们的定积分的代数和即有 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
可以推广到有限个函数的代数和的情况

3.定积分的可加性: 如果积分区间 $[a,b]$ 被点 c 分成两个

小区间 $[a,c]$ 与 $[c,b]$, 则有 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4.如果在区间 $[a,b]$ 上, 总有 $f(x) \leq g(x)$, 则有 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

牛顿—莱布尼茨公式

如果 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上任意一个原函数则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 若 $\int_0^1 (2x+k)dx = 1$, 则常数 $k = ()$

- A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

【答案解析】

$$\int_0^1 (2x+k)dx = (x^2+kx)\Big|_0^1 = 1+k = 1 \Rightarrow k = 0$$

2. $\int_0^1 2^x dx = ()$

- A. $\ln 2$ B. $2 \ln 2$ C. $\frac{1}{\ln 2}$ D. $\frac{2}{\ln 2}$

【答案解析】 C

$$\int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x \Big|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}$$

3. $\frac{d}{dx} \int_0^x e^t dt = ()$

- A. e^x B. $e^x - 1$ C. e^{x-1} D. e^{x+1}

【答案解析】 A

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(t)dt = f(x), \text{ 故 } \frac{d}{dx} \int_0^x e^t dt = e^x$$

4. $\int_0^1 (2x+1)^3 dx =$

- A. -10 B. -8 C. 8 D. 10

【答案解析】

$$\begin{aligned} \int_0^1 (2x+1)^3 dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 (2x+1)^3 d(2x+1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (2x+1)^4 \Big|_0^1 = 10 \Rightarrow D \end{aligned}$$

5. 设 $I_1 = \int_0^1 x^2 dx$, $I_2 = \int_0^1 x^3 dx$, $I_3 = \int_0^1 x^4 dx$, 则

A. $I_1 > I_2 > I_3$ B. $I_2 > I_3 > I_1$

C. $I_3 > I_2 > I_1$ D. $I_1 > I_3 > I_2$

【答案解析】

$$I_1 = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}; \quad I_2 = \frac{1}{4}x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}; \quad I_3 = \frac{1}{5}x^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow I_1 > I_2 > I_3 \Rightarrow A$$

这题也可采用定积分性质解决

6. 若 $f(x)$ 为连续的奇函数, 则 $\int_{-1}^1 f(x) dx =$

A. 0 B. 2 C. $2f(-1)$ D. $2f(1)$

【答案解析】

因为 $f(x)$ 为连续的奇函数, $\int f(x) dx$ 必为偶函数

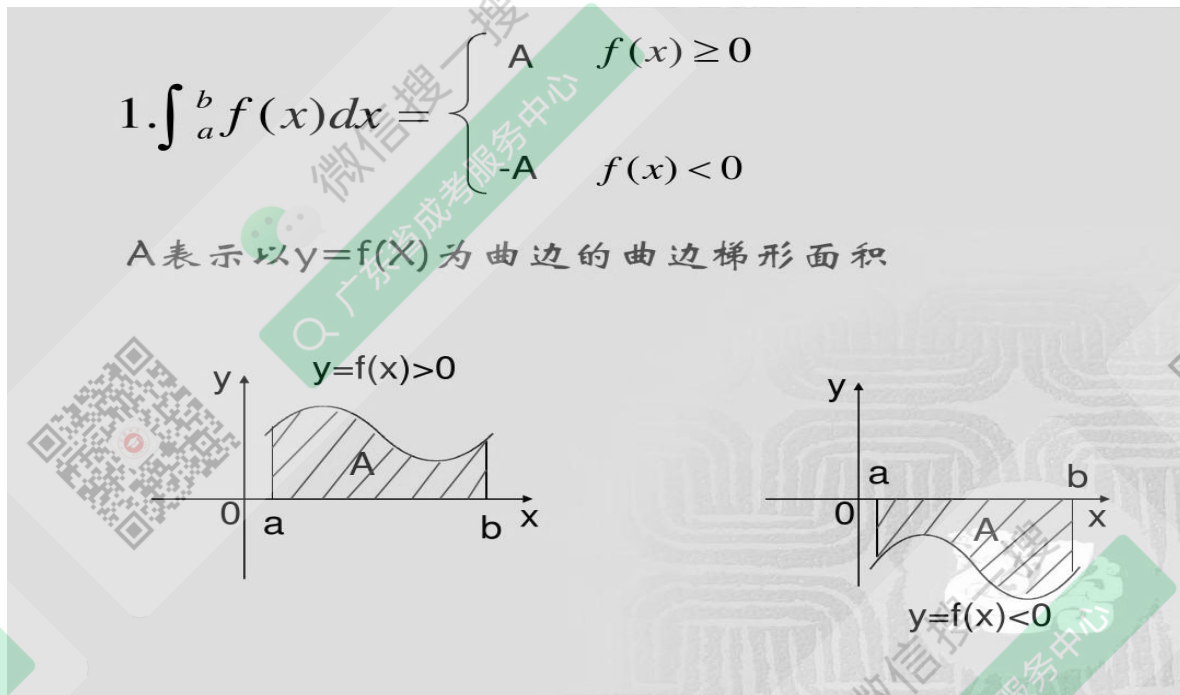
又 1 与 -1 互为相反数, $\Rightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx = 0 \Rightarrow A$

第十四个考点相对来说在选择题里面是普通考点，一般放在解答题里考察，选择题考的少。

(14) 定积分的几何意义

(1) 当 $f(x) \geq 0$ 时，定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 表示由连续曲线 $y = f(x)$ ，直线 $x = a, x = b (a < b)$ 和 x 轴所围成的曲边梯形 $aABb$ 的面积 S ，即 $S = \int_a^b f(x)dx$

(2) 当 $f(x) \leq 0$ 时，曲边梯形 $aABb$ 的面积 S 如图2. 即 $S = -\int_a^b f(x)dx$



以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续且 $f(x) > 0$ 则 ()

- A. $\int_a^b f(x)dx > 0$ B. $\int_a^b f(x)dx < 0$.
 C. $\int_a^b f(x)dx = 0$ D. $\int_a^b f(x)dx$ 的符号无法确定

【答案解析】 A

若在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) > 0$ ，则定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的值是由曲线 $y = f(x)$ ，直线 $x = a, x = b, y = 0$ 所围成图形的面积，所以 $\int_a^b f(x)dx > 0$

第十五个考点相对来说在选择题里面是高频考点，一般考察求多元函数偏导数。

(15) 多元函数偏导数

定义：设 D 为 xOy 平面上的一个区域，如果对于 D 上的每一点 $P(x, y)$ ，变量 z 依照某一规律 f 有唯一确定的数值与之对应，则称 z 为 x, y 的函数，记作 $z = f(x, y)$ ，类似的可以定义三元函数，记作 $u = f(x, y, z)$ 二元及二元以上的函数统称多元函数。

偏导数的求法：

求二元函数 $z = f(x, y)$ 对 x 和 y 的偏导数，并不需要新的方法，当求 $f(x, y)$ 对 x 的偏导数时，只要将二元函数中的 y 看成是常数，而对 x 求导数就行了。

同理，求 $f(x, y)$ 对 y 的偏导数时，只要将二元函数中的 x 看成是常数，而对 y 求导数就行了。如果要求 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的偏导数，只需在偏导函数中将 $x = x_0, y = y_0$ 带入即可。

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 设二元函数 $z = e^{x^2+y}$ ，则下列各式中正确的是（ ）

A. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+y}$ B. $\frac{\partial z}{\partial y} = e^y$ C. $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y}$ D. $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y}$

【答案解析】D

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+y}, \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y}$$

2. 设函数 $z = 3x^2y$ ，则 $\frac{\partial z}{\partial y} = ()$

A. $6y$ B. $6xy$ C. $3x$ D. $3x^2$

【答案解析】D

$$z = 3x^2y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2$$

3. 设二元函数 $z = x^y$ ，则 $\frac{\partial z}{\partial x} = ()$

A. yx^{y-1} B. yx^{y+1} C. $x^y \ln x$ D. x^y

【答案解析】A

$$z = x^y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$$

4. 设二元函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 = ()$

A. 1 B. 2 C. $x^2 + y^2$ D. $\frac{1}{x^2 + y^2}$

【答案解析】 A

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 = 1$$

5. 若二元函数 $z = x^2y + 3x + 2y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$

A. $2xy + 3 + 2y$ B. $xy + 3 + 2y$ C. $2xy + 3$ D. $xy + 3$

【答案解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 3 \Rightarrow C$$

6. 设函数 $z = (x - y)^{10}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$

A. $(x - y)^{10}$ B. $-(x - y)^{10}$ C. $10(x - y)^9$ D. $-10(x - y)^9$

【答案解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 10(x - y)^9 \Rightarrow C$$

7. 设函数 $z = x^2e^y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,0)} =$

A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,0)} = 2 \Rightarrow D$$

第十六个考点相对来说在选择题里面是高频考点，一般考察求二阶偏导数。

(16) 二阶偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{xx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = f''_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = f''_{yx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{yy}(x, y)$$

称 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 为 $z = f(x, y)$ 的二阶混合偏导数。

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 设二元函数 $z = \cos(xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = ()$

A. $y^2 \sin(xy)$ B. $y^2 \cos(xy)$ C. $-y^2 \sin(xy)$ D. $-y^2 \cos(xy)$

【答案解析】 D

$$z = \cos(xy) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -y \sin(xy) \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y^2 \cos(xy)$$

第十七个考点对于高数一相对来说在选择题里面是一般考点，有些年份会考察，有些年份不考察。

(17) 向量代数与空间解析几何 (只针对高数一考生)

一、平面的一般方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$

其中 A 、 B 、 C 不全为零， x 、 y 、 z 的系数就是该平面的一个法线向量 n 的坐标，

即 $n = \{A, B, C\}$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 平面 $x + 2y - 3z + 4 = 0$ 的一个法向量为

A. $\{1, -3, 4\}$ B. $\{1, 2, 4\}$ C. $\{1, 2, -3\}$ D. $\{2, -3, 4\}$

【答案解析】

由法向量的定义可知

平面 $x + 2y - 3z + 4 = 0$ 的一个法向量为 $\{1, 2, -3\}$

$\Rightarrow C$

2. 过点 $\{1, 0, 0\}$, $\{0, 1, 0\}$, $\{0, 0, 1\}$ 的平面方程为

A. $x + y + z = 1$ B. $2x + y + z = 1$

C. $x + 2y + z = 1$ D. $x + y + 2z = 1$

可以把点坐标直接带入，符合的只有 A

二、简单的二次曲面

(1) 球面, 方程对应为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ 球心为 (a, b, c) , 半径为 R 的球面方程(2) 椭球面, 方程对应为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

中心在原点

(3) 圆柱面方程为 $x^2 + y^2 = R^2$ (4) 椭圆柱面方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (5) 双曲柱面方程对应为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ (6) 抛物柱面方程对应为 $x^2 - 2py = 0 (p > 0)$ (7) 旋转抛物面方程对应为 $z = x^2 + y^2$ (8) 圆锥面, 方程对应为 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ 表示顶点在原点, O_z 为对称轴

【真题解析】

1. 方程 $x^2 + y^2 - 2z = 0$ 表示的二次曲面为

A. 柱面 B. 球面 C. 旋转抛物面 D. 椭球面

【答案解析】

$$x^2 + y^2 - 2z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2z$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = z$$

 \Rightarrow 方程 $x^2 + y^2 - 2z = 0$ 表示的二次曲面为旋转抛物面 $\Rightarrow C$ 2. 设球面方程为 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$, 则该球的球心坐标和半径分别为A. $(-1, 2, -3); 2$ B. $(-1, 2, -3); 4$ C. $(1, -2, 3); 2$ D. $(1, -2, 3); 4$

【答案解析】

根据球面方程的定义得到

该球的球心坐标为 $(1, -2, 3)$, 该球的半径为 $2 (R^2 = 2^2 = 4)$ $\Rightarrow C$

第十八个考点对于高数二相对来说在选择题里面是高频考点，一般考察基本概率初步。

(18) 概率初步 (只针对高数二考生)

事件的关系:

(1) 事件的包含与相等关系

设 A, B 为两个事件, 如果事件 A 发生, 必然导致事件 B 发生。则事件 B 包含事件 A , 或事件 A 包含于事件 B , 记作 $A \subset B$, 或 $B \supset A$ 。如果事件 A 包含事件 B , 事件 B 又包含事件 A , 则称 A, B 事件相等 $A = B$ 。

(2) 设 A, B 为两个事件, $A \cup B$ (或 $A+B$) 表示事件 A 与 B 中至少有一个发生。 $A \cap B$ (或 AB) 表示事件 A 与 B 同时发生。

(3) 事件互不相容或对立关系

如果事件 A 与事件 B 在同一次实验中不能同时发生, 即 $AB = \emptyset$, 称事件 A 与 B 是互不相容的 (或互斥的),

也称 A 与 B 互斥。设有事件 A , 事件 A 不发生为事件 A 的逆 (或者 A 的对立事件) 记作 \bar{A} , 若 $B = \bar{A}$,

则 A, B 具有对立关系。

概率的性质:

定义: 设 E 为含有 n 个基本事件的古典型实验, A 为由 m 个基本事件组成的随机事件, 那么 A 的概率为 $P(A) = \frac{m}{n}$, 则称这样定义的概率为概率的古典型定义。

基本性质:

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) 有限可加性: 若 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互斥, 则 $P(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$

(4) 加法定理: 若 A, B 为任意两个随机事件, 则 $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

(5) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

离散性随机变量的数学期望:

定义: 设离散型随机变量 ξ 的概率分布为则称 $\sum_{i=1}^n x_i p_i$ 为 ξ 的数学期望或均值, 记作 $E(\xi)$

则称 $\sum_{i=1}^n [x_i - E(\xi)]^2 p_i$, 则称此级数的和为 ξ 的方差, 记作 $D(\xi)$ 则称 $\sqrt{D(\xi)}$ 为随机变量 ξ 的标准差。

ξ	x_1	x_2	\dots	x_n
$P(\xi = x_i)$	P_1	P_2	\dots	P_n

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.甲乙两人各自独立射击1次，甲射中目标的概率为0.8，乙射中目标的概率为0.9，则至少有一人射中目标的概率为（）

A.0.98 B.0.9 C.0.8 D.0.72

【答案解析】 A

设A为甲射中，B为乙射中， $P(A)=0.8, P(B)=0.9$

至少有一人射中的概率 $1-P(\bar{A} \cap \bar{B})=1-(1-0.8) \times (1-0.9)=0.98$

2.设事件A, B相互独立, A, B发生的概率分别为0.6和0.9, 则A, B都不发生的概率为（）

A.0.54 B.0.04 C.0.1 D.0.4

【答案解析】 B

事件A, B相互独立, 则 \bar{A}, \bar{B} 也相互独立, 故 $P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})=(1-0.6) \times (1-0.9)=0.04$

3.设事件A, B互不相容, $P(A)=0.3, P(B)=0.2$, 则 $P(A+B)=()$

A.0.44 B.0.5 C.0.1 D.0.06

【答案解析】 B

4.设A, B为两个随机事件, 且相互独立, $P(A)=0.6, P(B)=0.4$ 则 $P(A-B)=$

A.0.24 B.0.36 C.0.4 D.0.6

【答案解析】

因为A, B为两个随机事件, 且相互独立

$$\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)$$

$$=0.6-0.6 \times 0.4=0.36 \Rightarrow B$$

5.设离散型随机变量X的概率分布如下, 则 $a=$

X	-1	0	1	2
P	2a	a	3a	4a

【答案解析】

由概率分布性质得

$$a+2a+3a+4a=10a=1 \Rightarrow a=0.1 \Rightarrow A$$

第十九个考点对于高数一相对来说在选择题里面是一般考点，一般考察判断级数收敛发散性。

(19) 无穷级数及常微分方程 (只针对高数一考生)

无穷级数:

(一) 定义: 设有数列 $\{u_n\} (n=1,2,\dots)$, 称表达式 $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为无穷级数, 简称级数, 而称 u_1 为首项, u_n 为级数的一般项。

(二) 收敛与发散

如果数列 $\{S_n\}$ 有极限, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 极限值 S 称为级数的和,

或者说级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛收敛于 S , 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$. 反之, 若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 则称级数发散。

(三) 收敛级数的必要条件

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 由此可知: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定发散

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 0$, 级数的收敛性不能判断, 如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛。

(四) 绝对收敛与条件收敛

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定收敛, 此时 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 称为绝对收敛

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 此时收敛为条件收敛

(五) 判定方法

1. 比较判别法

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 皆为正项级数, 且 $0 \leq u_n \leq v_n (n=1,2,\dots,n)$. 则

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛。

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 必发散。

2. 比值判别法 (达朗贝尔判别法)

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则

$$\begin{cases} \rho < 1 \text{ 时收敛} \\ \rho > 1 \text{ 时发散} \\ \rho = 1 \text{ 时不定} \end{cases}$$

如果 u_n 常有因子 n , 用这种方法判别正项级数的收敛性比较方便

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 已知 a 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+a^2}$

A. 发散 B. 条件收敛 C. 绝对收敛 D. 收敛性与 a 的取值有关

【答案解析】 B

当 $n \rightarrow \infty$ 时， $u_n = (-1)^n \frac{1}{n+a^2} \rightarrow 0$.

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n+a^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+a^2}$ ，因为 $\frac{1}{n+a^2} \leq \frac{1}{n}$ ，而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n+a^2} \right|$ 发散

由莱布尼茨判别法可知， $u_n = \frac{1}{n+a^2} > u_{n+1} = \frac{1}{n+1+a^2}$ ，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 收敛

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+a^2}$ 条件收敛.

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k}{n^2}$ (k 为非零常数)

A. 绝对收敛 B. 条件收敛 C. 发散 D. 收敛值与 k 的取值有关

【答案解析】 A

当 $n \rightarrow \infty$ 时， $u_n = (-1)^n \frac{k}{n^2} \rightarrow 0$.

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{k}{n^2} \right| = |k| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ，显然级数 $|k| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛

即 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k}{n^2}$ 绝对收敛

第十九个考点对于高数一同学相对来说在选择题里面是一般考点，一般考察求收敛半径。

(20) 收敛半径求法

收敛半径

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径的求法

$$(1) \text{ 对于不缺项的幂级数 } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ 设 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho, \text{ 则收敛半径 } R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, 0 < \rho < +\infty \\ 0, \rho = +\infty \\ +\infty, \rho = 0 \end{cases}$$

(2) 对于缺项的幂级数. 如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$, 令 $u_n = a_n x^{2n}, u_{n+1} = a_{n+1} x^{2(n+1)}$,

$$\text{考察 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{2(n+1)}}{a_n x^{2n}} \right| = \rho x^2$$

$$\text{则当 } \rho x^2 < 1, \text{ 级数收敛, 可知收敛半径 } R = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\rho}}, 0 < \rho < +\infty \\ +\infty, \rho = 0 \\ 0, \rho = +\infty \end{cases}$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ 的收敛半径为 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. $+\infty$

【答案解析】

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

故幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ 的收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 1$

(二) 填空题

本部分共计共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，下面我们一起来梳理填空题的考试知识点和真题解析。填空题这个部分，需要填写题目的最终结果，这个过程中避免不了计算，10 个题目中，至少有 4-6 个题目是可以直接观察出结果的，比较浅显简单；另外 4-6 题需要大家做个运算过程计算出最终结果，大家在这个计算的过程中，要做到仔细、认真，切莫出现知识点掌握了，但是结果计算错误的尴尬。这个板块大家掌握了基础考点至少可以拿到 20-30 分。

第一个考点相对来说在填空题里面是高频考点，一般考察重要极限公式及其变形。

(1) 两个重要极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

扩充一般形式

$$\lim_{\partial(x) \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\partial(x)} = 1$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

也可扩充为一般形式

$$\lim_{\partial(x) \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{\partial(x)}\right]^{\partial(x)} = e$$

$$\lim_{\partial(x) \rightarrow 0} [1 + \partial(x)]^{\frac{1}{\partial(x)}} = e$$



以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sin(x-2)} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案解析】

重要极限 (1)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sin(x-2)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2}} = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案解析】

重要极限 (2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{\frac{x}{2}}} = e^2$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案解析】

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} = e^{-\frac{2}{3}}$$

$$4. \text{设 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{ax} = 3, \text{ 则 } a = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案解析】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{ax} = \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = \frac{2}{a} = 3$$

$$a = \frac{2}{3}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案解析】

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{3x} \cdot (-3)} = e^{-3}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案解析】

可以采用特殊极限一采用的原理等价无穷小代换

当 $x \rightarrow 0$ 时, $x \sim \sin x \sim \tan x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2$$

$$7. \text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } f(x) \text{ 与 } 3x \text{ 是等价无穷小, 则 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案解析】

因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 与 $3x$ 是等价无穷小

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{3x} = 3$$

第二个考点相对来说在填空题里面是高频考点，一般考察求极限的方法。

(2) 求极限方法

①直接带入法：分母不为零的可以通过极限的四则运算法则直接带入求解。

函数极限的四则运算定理：

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0 \text{ 时,}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B}$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 + x^2 - 2}{4x^2 + 5x - 8} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案解析】

这里由于分母不为零，所以直接把 $x=1$ 代入

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 + x^2 - 2}{4x^2 + 5x - 8} = \frac{3+1-2}{4+5-8} = 2$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{2x^2+3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案解析】

这里由于分母不为零，所以直接把 $x=0$ 代入

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{2x^2+3} = \frac{0-1}{0+3} = -\frac{1}{3}$$

第三个考点相对来说在填空题里面是高频考点，一般考察函数在某一点的连续性。

(3) 函数连续性

① 函数在某一点上的连续性

定义1: 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义, 如果有自变量 Δx (初值为 x_0) 趋近于 0 时, 相应的函数改变量 Δy 也趋近于 0, 即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续.

定义2: 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义, 如果当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限值存在, 且等于 x_0 处的函数值 $f(x_0)$, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续.

以下是我们历年考试的真题, 我们可以进行练习下, 掌握上面的知识点, 可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 若函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+a, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a = \underline{\quad}$

【答案解析】连续性定义: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2x+a) = f(0)$$

$$0+a=3$$

$$a=3$$

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^{3x}-1, & x \geq 0 \\ a, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a = \underline{\quad}$

【答案解析】

连续性定义: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 由于是在 $x=0$ 处连续

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x}-1) = f(0) = a$$

$$1-1=0=a$$

3.若函数 $f(x) = \begin{cases} 5x, & x < 0 \\ a, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案解析】

连续性定义: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 由于是在 $x=0$ 处连续

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 5x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} a = a$$

$$\Rightarrow a = 0$$

第四个考点相对来说在填空题里面是高频考点, 一般考察求函数间断点。

(4) 函数间断点

定义: 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续, 则称点 x_0 为 $f(x)$ 的一个间断点。

由函数在某点连续的定义可知, 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有下列三种情况之一, 则点 x_0 是 $f(x)$ 的一个间断点:

- (1) 在点 x_0 处, $f(x)$ 没有定义。
- (2) 在点 x_0 处, $f(x)$ 的极限不存在。
- (3) 虽然点 x_0 处 $f(x)$ 有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

以下是我们历年考试的真题, 我们可以进行练习下, 掌握上面的知识, 可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.函数 $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ 的间断点为 $x = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案解析】

当 $x-2=0$ 即 $x=2$ 时, 函数 $f(x)$ 无定义。所以 $x=2$ 是函数 $f(x)$ 的间断点。

2.函数 $f(x) = \frac{2}{x-1}$ 的间断点为 $x = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案解析】

当 $x-1=0$, 即 $x=1$ 时, 函数 $f(x)$ 无定义, 所以函数 $f(x)$ 的间断点为 $x=1$ 。

第五个考点相对来说在填空题里面是高频考点，一般考察函数定义公式及其变形。

(5) 导数定义公式

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，若自变量 x 在点 x_0 处的改变量为 Δx ($x_0 + \Delta x$ 仍在该领域内). 函数 $y = f(x)$ 相应地有改变量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. 如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ 存在}$$

则此极限值为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数. 记作 $y'|_{x=x_0}$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ 或 $f'(x_0)$.

$$\text{即 } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 若函数 $f(x)$ 满足 $f'(1) = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案解析】1

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \frac{1}{x + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

第六个考点相对来说在填空题里面是高频考点，一般考察求函数在某点的切线。

(6) 导数的几何意义

导数的几何意义：函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线斜率

曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线方程为 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的法线方程为 $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 已知曲线 $y = x^2 + x - 2$ 的切线 l 斜率为 3，则 l 的方程为 _____

【答案解析】

曲线在某一点的切线斜率 $k = y' = 2x + 1 = 3 \Rightarrow x = 1$

$y|_{x=1} = 0$ ，即切线过点 $(1, 0)$ ，所求切线为 $y = 3(x - 1)$ ，即 $3x - y - 3 = 0$

2. 曲线 $y = \ln x$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程为 _____

【答案解析】

切线斜率 $k = y'|_{x=1} = \frac{1}{x}|_{x=1} = 1$ 即切线方程为 $y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1$

第七个考点相对来说在填空题里面是必考点，一般考察基本初等函数公式和导数的四则运算法则。

(7) 求导方法

①基本初等函数导数公式

$$1. (c)' = 0$$

$$2. (x^a)' = ax^{a-1}$$

$$3. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, \text{且} a \neq 1)$$

$$4. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$5. (a^x)' = a^x \ln a$$

$$6. (e^x)' = e^x$$

$$7. (\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x$$

$$8. (\tan x)' = \sec^2 x, (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$9. (\sec x)' = \sec x \tan x, (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$10. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

$$11. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

$$12. (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$13. (\operatorname{arc cot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

②导数的四则运算法则

$$1. (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$2. (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$3. (cu)' = cu' \quad (c \text{ 为常数})$$

$$4. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 设函数 $f(x) = x - \frac{1}{x}$ ，则 $f'(x) =$ _____

【答案解析】

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$$

2. 设函数 $y = 2 + \sin x$ ，则 $y' =$ _____

【答案解析】

$$y' = 0 + \cos x = \cos x$$

3. 设函数 $y = x^2 - e^x$ ，则 $y' =$ _____

【答案解析】

$$y' = 2x - e^x$$

4. 设函数 $y = x^3$ ，则 $y' =$ _____

【答案解析】

$$y' = 3x^2$$

5. 设函数 $y = \frac{x}{1+x}$ ，则 $y' =$ _____

【答案解析】

$$y' = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$$

6. 设函数 $f(x) = x - \arctan x$ ，则 $f'(x) =$ _____

【答案解析】 利用求导四则运算法则

$$f'(x) = (x - \arctan x)' = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

第八个考点相对来说在填空题里面是高频考点，一般考察隐函数求导方法

(8) 隐函数求导

解析法表示函数通常有两种：

(1). $y=f(x)$ 来表示的，称之为显函数。如 $y=\sin wx$ ， $y=e^x \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

(2). x 与 y 之间的函数关系是由一个方程 $F(x, y)=0$ 来确定这种称之为隐函数，

如 $2x+y^3-1=0$ ， $xy-e^x+e^y=0$

对于隐函数的求导通常做法：

可直接在方程 $F(x, y)=0$ 的两端同时对 x 求导，而把 y 视为中间变量，利用复合函数求导法即可。

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $e^y=x+y$ 所确定的隐函数，则 $\frac{dy}{dx}=\underline{\hspace{2cm}}$

【答案解析】

$e^y=x+y$ ，两边同时对 x 求导得到

$$e^y \cdot y' = 1 + y' \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{e^y - 1}$$

2. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y=x-e^y$ 所确定的隐函数，则 $\frac{dy}{dx}=\underline{\hspace{2cm}}$

【答案解析】

$y=x-e^y$ ，两边同时对 x 求导得

$$y' = 1 - e^y \cdot y' \Rightarrow (1 + e^y) y' = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + e^y}$$



第九个考点相对来说在填空题里面是一般考点，一般考察对数求导法

(9) 对数求导法

一般解题思路为两边同时取对数，在对 x 求导，得出 y'

【真题解析】

1. 设 $f(x) = x^{2x}$, 则 $f'(x) =$ _____

【答案解析】

先对原函数两边同时取对数，得到

$$\ln y = 2x \ln x$$

再两边同时对 x 求导得到

$$\frac{y'}{y} = 2 \ln x + 2 \Rightarrow y' = y(2 \ln x + 2)$$

再把 y 替换回来最终得到

$$y' = 2x^{2x}(\ln x + 1)$$

第十个考点相对来说在填空题里面是高频考点，一般考察高阶求导

(10) 高阶求导

如果函数 $y = f(x)$ 的导数 $y' = f'(x)$ 仍是 x 的可导函数，那么就称 $f'(x)$ 的导数为 $f(x)$ 的

二阶导数，相应地 $f'(x)$ 称为函数 $y = f(x)$ 的一阶导数。二阶导数记为 y'' , $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ 或 $\frac{d^2f}{dx^2}$

$$y'' = (y')', \quad f''(x) = [f'(x)]' \quad \text{或} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

那么以此类推， $f(x)$ 得 $n-1$ 阶导数的导数称为 $f(x)$ 的 n 阶导数

记作 $y^{(n)}$ 或 $y^{(n)}(x)$ 或 $\frac{d^n y}{dx^n}$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 设函数 $f(x) = \sin(1-x)$, 则 $f''(1) =$ _____

【答案解析】

$$f'(x) = -\cos(1-x) \Rightarrow f''(x) = \sin(1-x) \Rightarrow f''(1) = 0$$

2. 设函数 $y = x^{\frac{3}{2}} + e^{-x}$, 则 $y'' =$ _____

【答案解析】

$$y = x^{\frac{3}{2}} + e^{-x} \Rightarrow y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - e^{-x} \Rightarrow y'' = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} + e^{-x}$$

第十一个考点相对来说在填空题里面是必考点，一般考察求函数微分

(11) 微分

微分公式：

$$(1) d(c) = 0 (c \text{ 为常数}). (2) d(x^a) = ax^{a-1} dx$$

$$(3) d(a^x) = a^x \ln a dx (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$$

$$(4) d(e^x) = e^x dx. (5) d \log_a x = \frac{1}{x \ln a} dx (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$$

$$(6) d(\ln x) = \frac{1}{x} dx. (7) d(\sin x) = \cos x dx$$

$$(8) d(\cos x) = -\sin x dx$$

函数的和、差、积、商微分运算公式

设 $u = u(x), v = v(x)$ 可微分，则

$$d(cu) = cdu (c \text{ 为常数}) ; d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$d(uv) = vdu + u dv ; d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2} (v \neq 0)$$

函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的微分，常记作 $dy|_{x=x_0}$ 或 $df(x)|_{x=x_0}$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \Rightarrow dy = f'(x) dx$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 设函数 $y = (x-3)^4$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案解析】

$$y' = 4(x-3)^3 \Rightarrow dy = 4(x-3)^3 dx$$

2. 设函数 $y = x^2 + e^x$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案解析】

$$y' = 2x + e^x \Rightarrow dy = (2x + e^x) dx$$

3. 设函数 $y = x + \sin x$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案解析】

$$y' = 1 + \cos x \Rightarrow dy = (1 + \cos x) dx$$

4. 若 $y = e^{2x}$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案解析】

$$y = e^{2x} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 2e^{2x} \Rightarrow dy = 2e^{2x} dx$$

5. 设函数 $y = \ln \sin x$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案解析】

$$y = \ln \sin x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

$$\Rightarrow dy = \cot x dx$$

第十二个考点相对来说在填空题里面是高频考点，一般考察求函数单调性和单调区间

(12) 导数的应用

①函数单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导 .

1. 如果在区间 (a, b) 内 $f'(x) > 0$, 则函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是递增的;

2. 如果在区间 (a, b) 内 $f'(x) < 0$, 则函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是递减的。

注: $f(x)$ 在个别点处 $f'(x) = 0$ 不影响 $f(x)$ 的单调性 .

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 的单调增区间是 _____

【答案解析】

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}, \text{ 令 } f'(x) > 0 \Rightarrow x < -1 \text{ 或 } x > 1$$

函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 的单调增区间是 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

第十三个考点相对来说在填空题里面是高频考点，一般考察求曲线的水平和铅直渐近线

(13) 曲线的水平渐近线与铅直渐近线

定义：

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ，则

称直线 $y = A$ 是曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线.

若 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ，则

称直线 $x = a$ 是曲线 $y = f(x)$ 的铅直渐近线.

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 曲线 $y = \frac{x+1}{2x+1}$ 的水平渐近线方程为 _____

【答案解析】

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}, \text{水平渐近线方程为 } y = \frac{1}{2}$$

2. 曲线 $y = \frac{x+1}{(x-1)^2}$ 的铅直渐近线方程是 _____

【答案解析】

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{(x-1)^2} = \infty, \text{则 } x = 1 \text{ 是 } y = \frac{x+1}{(x-1)^2} \text{ 的铅直渐近线}$$

3. 曲线 $y = \frac{x+1}{2x+1}$ 的铅直渐近线方程为 _____

【答案解析】

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{x+1}{2x+1} = \infty, x = -\frac{1}{2} \text{ 是曲线 } y = \frac{x+1}{2x+1} \text{ 的铅直渐近线方程}$$

第十四个考点相对来说在填空题里面是必考点，一般考察求不定积分

(14) 不定积分的性质及公式

区间上 $f(x)$ 的原函数的全体，称为 $f(x)$ 在 I 上的不定积分记为 $\int f(x)dx$.

如果 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则有 $\int f(x)dx = F(x) + C$ ，其中 C 为任意常数.

不定积分的性质及公式

$$(1) \left[\int f(x) dx \right]' = f(x), d \int f(x) dx = f(x) dx$$

$$(2) \int dF(x) = F(x) + C, \int F'(x) dx = F(x) + C$$

$$(3) \int kf(x) dx = k \int f(x) dx (k \text{ 为常数})$$

$$(4) \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$(1) \int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C (a \neq -1)$$

$$(2) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$(3) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$$

$$(4) \int e^x dx = e^x + C$$

$$(5) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$(6) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(7) \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$(8) \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$(9) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$(10) \int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$(11) \int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$(12) \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$



以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

$$1. \int \frac{1}{2x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案解析】

$$\int \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \ln|x| + C$$

$$2. \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案解析】

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx = \ln|x| + \arctan x + C$$

$$3. \text{若} \int f(x) dx = \cos(\ln x) + C, \text{则} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案解析】

$$f(x) = [\cos(\ln x) + C]' = -\frac{1}{x} \sin(\ln x)$$

$$4. \int (2x+3) dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案解析】

$$\int (2x+3) dx = \int 2x dx + \int 3 dx = x^2 + 3x + C$$

$$5. \int \frac{1}{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案解析】 考察不定积分的基本公式

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

$$6. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案解析】 考察不定积分的基本公式

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

第十五个考点相对来说在填空题里面考察较少，一般都放在解答题

(15) 求不定积分的常用方法

一、换元积分法（凑微分法）

设 $f(u)$ 有原函数 $F(u)$ ，且 $u = v(x)$ ，则 $F[v(x)]$ 是 $f[v(x)]v'(x)$ 的原函数，即有：

$$\int f[v(x)]v'(x)dx = F[v(x)] + C$$

二、分部积分法

设 u 、 v 都是 x 的可微函数，则有

$$\int u dv = uv - \int v du$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

$$1. \int \frac{dx}{3-x} = \text{——}$$

【答案解析】

$$\int \frac{dx}{3-x} = -\int \frac{1}{x-3} d(x-3) = -\ln|3-x| + C (C \text{ 为任意常数})$$

第十六个考点相对来说在填空题里面是必考点，一般考察求定积分

(16) 定积分

$\int_a^b f(x)dx$ 称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

其中 $f(x)$ 称为被积函数， $f(x)dx$ 称为被积表达式， x 称为积分变量， $[a,b]$ 称为积分区间， a 称为积分下限， b 称为积分上限.

注意：

(1) 定积分若存在，它只是一个确定的常数，它只与被积函数 $f(x)$ 及积分区间 $[a,b]$ 有关，

而与积分变量的符号无关，即应有 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

(2) 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 中，上下限的大小没有限制，但若颠倒积分上下限，必须改变定积分

的符号，即 $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.特别地有 $\int_a^a f(x)dx = 0$

1.常数可以提到积分号之外，即若 k 为常数，则有 $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

2.两函数代数和的定积分等于它们的定积分的代数和即有

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

可以推广到有限个函数的代数和的情况.

3.定积分的可加性：如果积分区间 $[a,b]$ 被点 c 分成两个

小区间 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ ，则有 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4.如果在区间 $[a,b]$ 上，总有 $f(x) \leq g(x)$ ，则有 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

牛顿—莱布尼茨公式

如果 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上任意一个原函数则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

$$1. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案解析】

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$= 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案解析】

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}$$

$$3. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案解析】

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} = 1$$

$$4. \int_{-1}^1 (x^5 + x^2) dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案解析】

$$\int_{-1}^1 (x^5 + x^2) dx = \left(\frac{1}{6} x^6 + \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$5. \int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案解析】 考察凑微法

$$\int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} dx = 2 \int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} d \left(\frac{x}{2} \right) = -2 \cos \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} = 2$$

$$6. \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案解析】 考察凑微法

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -\int_0^{+\infty} e^{-x} d(-x) = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1$$

$$7. \int_{-1}^1 x \tan^2 x dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案解析】

被积函数 $x \tan^2 x$ 在对称区间 $[-1, 1]$ 上是奇函数

所以得到 $\int_{-1}^1 x \tan^2 x dx = 0$

$$8. \int_{-1}^1 (x \cos^2 x + 2) dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案解析】

$$\int_{-1}^1 x \cos^2 x dx + \int_{-1}^1 2 dx$$

由于被积函数 $x \cos^2 x$ 是在对称区间 $[-1, 1]$ 奇函数，所以为 $\int_{-1}^1 x \cos^2 x dx = 0$

$$\text{原式} = 0 + 2x \Big|_{-1}^1 = 2 + 2 = 4$$

第十七个考点相对来说在填空题里面是高频考点，一般考察求多元函数偏导数

(17) 多元函数偏导数

定义：设 D 为 xOy 平面上的一个区域，如果对于 D 上的每一点 $P(x, y)$ ，变量 z 依照某一规律 f 有唯一确定的数值与之对应，则称 z 为 x, y 的函数，记作 $z = f(x, y)$ ，类似的可以定义三元函数，记作 $u = f(x, y, z)$ 二元及二元以上的函数统称多元函数。

偏导数的求法：

求二元函数 $z = f(x, y)$ 对 x 和 y 的偏导数，并不需要新的方法，当求 $f(x, y)$ 对 x 的偏导数时，只要将二元函数中的 y 看成是常数，而对 x 求导数就行了。

同理，求 $f(x, y)$ 对 y 的偏导数时，只要将二元函数中的 x 看成是常数，而对 y 求导数就行了。如果要求 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的偏导数，只需在偏导函数中将 $x = x_0, y = y_0$ 带入即可。

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 设函数 $y = \sin(x + 2y)$ ，则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案解析】

$$y = \sin(x + 2y) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \cos(x + 2y)$$

2. 设二元函数 $z = e^{\frac{y}{x}}$ ，则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{y}{x^2}\right) e^{\frac{y}{x}}, \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,1)} = -e$$

第十八个考点相对来说在填空题里面是高频考点，一般考察求二阶偏导数

(18) 二阶偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{xx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = f''_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = f''_{yx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{yy}(x, y)$$

称 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 为 $z = f(x, y)$ 的二阶混合偏导数.

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 设二元函数 $z = x^3 y^2$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____

【答案解析】

$$z = x^3 y^2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2 y$$

2. 设二元函数 $z = x^2 y^2$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____

【答案解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy$$

3. 设函数 $z = \frac{e^y}{x}$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____

【答案解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^y}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{e^y}{x^2}$$

4. 函数 $z = x \arcsin y$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$ _____

【答案解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \arcsin y \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

第十九个考点相对来说在填空题里面是必考点，一般考察求函数的全微分

(19) 全微分

$$\text{全微分 } dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

一元函数 $y = f(x)$ 在点 x 处可导与可微是等价的。二元函数 $z = f(x, y)$ 可微与偏导数存在的
关系是：函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微的必要条件是偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 存在。可微的充

分条件是 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 存在且连续。类似地，若三元函数 $u = f(x, y, z)$ 可微，

$$\text{则 } du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些
真题。

【真题解析】

1. 设函数 $z = 3x + y^2$ ，则 $dz =$ _____

【答案解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3, \frac{\partial z}{\partial y} = 2y, dz = 3dx + 2ydy$$

2. 设二元函数 $z = x^4 \sin y$ ，则 $dz \Big|_{(1, \frac{\pi}{4})} =$ _____

【答案解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 \sin y, \frac{\partial z}{\partial y} = x^4 \cos y, dz = 4x^3 \sin y dx + x^4 \cos y dy$$

$$dz \Big|_{(1, \frac{\pi}{4})} = 2\sqrt{2}dx + \frac{\sqrt{2}}{2}dy$$

3. 设二元函数 $z = x^2 + 2xy$ ，则 $dz =$ _____

【答案解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y, \frac{\partial z}{\partial y} = 2x \Rightarrow dz = (2x + 2y)dx + 2x dy$$

4. 设二元函数 $z = x^2 + y^3$, 则 $dz|_{(1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案解析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2, dz = 2xdx + 3y^2dy \Rightarrow dz|_{(1,1)} = 2dx + 3dy$

5. 设函数 $z = \sin x \cdot \ln y$, 则 $dz = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \ln y \cdot \cos x; \frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \cdot \frac{1}{y}$$

$$dz = \cos x \ln y dx + \frac{\sin x}{y} dy$$

第二十个考点对于高数二学员来说在填空题里面是高频考点，一般考察基本事件的概率

(20) 概率初步 (只针对高数二考生)

事件的关系:

(1) 事件的包含与相等关系

设 A, B 为两个事件, 如果事件 A 发生, 必然导致事件 B 发生。则事件 B 包含事件 A , 或事件 A 包含于事件 B , 记作 $A \subset B$, 或 $B \supset A$ 。如果事件 A 包含事件 B , 事件 B 又包含事件 A , 则称 A, B 事件相等 $A = B$ 。

(2) 设 A, B 为两个事件, $A \cup B$ (或 $A+B$) 表示事件 A 与 B 中至少有一个发生。

$A \cap B$ (或 AB 或 AB) 表示事件 A 与 B 同时发生。

(3) 事件互不相容或对立关系

如果事件 A 与事件 B 在同一次实验中不能同时发生, 即 $AB = \emptyset$,

称事件 A 与 B 是互不相容的 (或互斥的),

也称 A 与 B 互斥。设有事件 A , 事件 A 不发生为事件 A 的逆 (或者 A 的对立事件) 记作 \bar{A} , 若 $B = \bar{A}$, 则 A, B 具有对立关系。

概率的性质:

定义: 设 E 为含有 n 个基本事件的古典型实验, A 为由 m 个基本事件组成的随机事件,

那么 A 的概率为 $P(A) = \frac{m}{n}$, 则称这样定义的概率为概率的古典型定义。

基本性质:

$$(1) 0 \leq P(A) \leq 1 \quad (2) P(\Omega) = 1$$

$$(3) \text{有限可加性: 若 } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ 两两互斥, 则 } P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

$$(4) \text{加法定理: 若 } A, B \text{ 为任意两个随机事件, 则 } P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$(5) P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

离散性随机变量的数学期望：

定义：设离散型随机变量 ξ 的概率分布为则称 $\sum_{i=1}^n x_i p_i$ ，为 ξ 的数学期望或均值，记作 $E(\xi)$

则称 $\sum_{i=1}^n [x_i - E(\xi)]^2 p_i$ ，则称此级数的和为 ξ 的方差，记作 $D(\xi)$

则称 $\sqrt{D(\xi)}$ 为随机变量 ξ 的标准差.

ξ	x_1	x_2	\dots	x_n
$P(\xi = x_i)$	P_1	P_2	\dots	P_n

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 设事件 A 发生的概率为0.7，则 A 的对立事件 \bar{A} 发生的概率为_____

【答案解析】

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.7 = 0.3$$

第二十个考点对于高数一学员来说在填空题里面是高频考点，一般考察求收敛半径

(21) 收敛半径

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径的求法

(1) 对于不缺项的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ，设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ ，则收敛半径 $R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, 0 < \rho < +\infty \\ 0, \rho = +\infty \\ +\infty, \rho = 0 \end{cases}$

(2) 对于缺项的幂级数，如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ ，令 $u_n = a_n x^{2n}$ ， $u_{n+1} = a_{n+1} x^{2(n+1)}$ ，

考察 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{2(n+1)}}{a_n x^{2n}} \right| = \rho x^2$

则当 $\rho x^2 < 1$ ，级数收敛，可知收敛半径 $R = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\rho}}, 0 < \rho < +\infty \\ +\infty, \rho = 0 \\ 0, \rho = +\infty \end{cases}$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ 的收敛半径 _____

【答案解析】

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}, \text{ 故幂级数 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \text{ 的收敛半径 } R = \frac{1}{\rho} = 3$$

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 的收敛半径 $R =$ _____

【答案解析】

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1, \text{ 收敛半径 } R = 1$$

3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛半径 _____

【答案解析】

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n, \text{ 假设 } a_n = n, \text{ 则有 } \rho = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\text{得到收敛半径 } R = \frac{1}{\rho} = 1$$

第二十二个考点对于高数一学员来说在填空题里面是高频考点，一般考察求微分方程通解

(22) 微分方程 (只针对高数一同学)

一阶微分方程解法:

- (1) 可分离变量的解法
- (2) 一阶线性微分方程

$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ 的解法, 可用公式法求解 $y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right]$

以下是我们历年考试的真题, 我们可以进行练习下, 掌握上面的知识点, 可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 微分方程 $y' = 3x^2$ 的通解 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案解析】

$y' = 3x^2 \Rightarrow dy = 3x^2 dx$, 两边同时积分得 $y = x^3 + C$

2. 微分方程 $y' = 2x$ 的通解 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案解析】

$y' = 2x \Rightarrow dy = 2x dx$, 两边同时积分得 $y = x^2 + C$

3. 微分方程 $y' - 2xy = 0$ 的通解 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案解析】

$y' - 2xy = 0$, 即 $\frac{dy}{y} = 2x dx$, 两边同时积分得 $\ln y = x^2 + C_1, y = Ce^{x^2}$

(三) 解答题

解答题共 8 小题，每小题 8-10 分，共 70 分。下面我们一起梳理解答题的考试知识点和真题解析。这个版块对于很多同学来说是头痛的地方，大部分学生都想放弃这块。但是大家总结历年真题考试内容可以发现，这一块的内容考的比较固定（比如洛必达求导、求不定积分、定积分性质等），很多知识点都是必考的，而且解题的思路也是一样的，所以大家只要用心，这部分 8 个题目还是可以很轻松攻克 5-6 个的，拿到 50-60 分。

第一个考点相对来说在解答题里面是高频考点，一般考察求解或者证明函数在某一点上的连续性。

(1) 函数连续性

① 函数在某一点上的连续性

定义1: 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，

如果有自变量 Δx （初值为 x_0 ）趋近于 0 时，

相应的函数改变量 Δy 也趋近于 0，即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续。

定义2: 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，

如果当 $x \rightarrow x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限值存在，

且等于 x_0 处的函数值 $f(x_0)$ ，即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续。

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a .

【答案解析】

连续性定义: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = f(0) = a$$

$$a = 1$$

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{3 \sin x}{x}, & x < 0 \\ 3x + a, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a .

【答案解析】

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (3x + a) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3 \sin x}{x} = 3$$

要使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，必须满足

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\Rightarrow a = 3$$

第二个考点相对来说在解答题里面是高频考点，一般考察复合函数求导。

(2) 复合函数求导

如果函数 $u = \alpha(x)$ 在点 x 处可导，函数 $y = f(u)$ 在对应点 u 处也可导，则复合函数 $y = f[\alpha(x)]$ 在点 x 处可导，且有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

$$\{f[\alpha(x)]\}' = f'(u) u'(x)$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 设函数 $y = xe^{2x}$ ，求 y'

【答案解析】

$$y' = x'e^{2x} + x(e^{2x})'$$

$$y' = (1+2x)e^{2x}$$

2. 设函数 $y = \cos(x^2 + 1)$ ，求 y'

【答案解析】

$$y' = -\sin(x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1)' = -2x \sin(x^2 + 1)$$

3. 设函数 $y = e^{\sin x}$ ，求 y'

【答案解析】

$$y = e^{\sin x}$$

$$y' = e^{\sin x} \cdot (\sin x)' = \cos x \cdot e^{\sin x}$$

4. 设函数 $y = \sin(2x - 1)$ ，求 y'

【答案解析】

$$y = \sin(2x - 1)$$

$$\Rightarrow y' = \cos(2x - 1) \cdot (2x - 1)' = 2 \cos(2x - 1)$$

第三个考点相对来说在解答题里面是高频考点，一般考察隐函数求导。

(3) 隐函数求导

一般的，如果参数方程 $\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}$ (t 为参数) 确定了 y 为 x 的函数，在计算此类由参数方程

所确定的导数时，不需要先消去参数 t 后再进行求导。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{u'(t)}{v'(t)} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 设 $\begin{cases} x = 1+t^2 \\ y = 1+t^3 \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

【答案解析】

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2}t$$

2. 设 $\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

【答案解析】

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2\sin 2t}{2\cos t} = -2\sin t$$

第四个考点相对来说在解答题里面是高频考点，一般考察隐函数求导。

(4) 隐函数求导

解析法表示函数通常有两种：

(1) $y = f(x)$ 来表示的，称之为显函数。如 $y = \sin wx$, $y = e^x \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

(2) x 与 y 之间的函数关系是由一个方程 $F(x, y) = 0$ 来确定这种称之为隐函数，

如 $2x + y^3 - 1 = 0$, $xy - e^x + e^y = 0$

对于隐函数的求导通常做法：

可直接在方程 $F(x, y) = 0$ 的两端同时对 x 求导，而把 y 视为中间变量，利用复合函数求导法即可。

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $e^y + xy = 1$ 所确定的隐函数，求 $\frac{dy}{dx}$ 。

【答案解析】

$e^y + xy = 1$ ，两边同时对 x 求导得

$$e^y \cdot \frac{dy}{dx} + y + x \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{e^y + x}$$

第五个考点相对来说在解答题里面是高频考点，一般考察函数的高阶求导。

(5) 高阶求导

如果函数 $y = f(x)$ 的导数 $y' = f'(x)$ 仍是 x 的可导函数，那么就称 $f'(x)$ 的导数为 $f(x)$ 的二阶导数，相应地 $f'(x)$ 称为函数 $y = f(x)$ 的一阶导数。二阶导数记为 y'' , $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ 或 $\frac{d^2f}{dx^2}$

$$y'' = (y')', \quad f''(x) = [f'(x)]' \text{ 或 } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

那么以此类推， $f(x)$ 得 $n-1$ 阶导数的导数称为 $f(x)$ 的 n 阶导数

$$\text{记作 } y^{(n)} \text{ 或 } y^{(n)}(x) \text{ 或 } \frac{d^n y}{dx^n}$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 设函数 $f(x) = \cos(2x+1)$, 求 $f'''(0)$.

【答案解析】

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\sin(2x+1) \Rightarrow f''(x) = -4\cos(2x+1) \Rightarrow f'''(x) = 8\sin(2x+1) \\ f'''(0) &= 8\sin 1 \end{aligned}$$

2. 设函数 $f(x) = 2x + \ln(3x+2)$, 求 $f''(0)$

【答案解析】

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 + \frac{1}{3x+2} \cdot (3x+2)' = 2 + \frac{3}{3x+2} \\ f''(x) &= \frac{-9}{(3x+2)^2} \\ \Rightarrow f''(0) &= -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

3. 设函数 $y = x \ln x$, 求 y''

【答案解析】

$$\begin{aligned} y' &= \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \\ y'' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

第六个考点相对来说在解答题里面是必考点，一般考察洛必达法则求导。

(6) 洛必达法则

如果当 $x \rightarrow a$ (或 $x \rightarrow \infty$)时，函数 $f(x)$ 与 $F(x)$ 都趋于零或都趋于无穷大，则称 $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{F(x)}$,

为未定型极限，并分别简记为“ $\frac{0}{0}$ ”或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”。洛必达法则是求未定型极限的一种有效方法。

其它类型未定式： $0 \cdot \infty$ ； $\infty - \infty$ 也可以变形为“ $\frac{0}{0}$ ”或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”来求解

方法：

(1) 先判定是否符合“ $\frac{0}{0}$ ”或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型

(2) 分别对分子分母同时求导，如果求导完发现还是属于“ $\frac{0}{0}$ ”或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型

那么再对分子分母同时求导。

(3) 当出现分母不为零时，就可以直接代入求解。

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2}$

【答案解析】

“ $\frac{0}{0}$ ”型，原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{2} = \frac{1}{2}$

2. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$

【答案解析】

“ $\frac{0}{0}$ ”型，原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x \sin x}{\cos x} = 2$

3. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{\sin x}$

【答案解析】

“ $\frac{0}{0}$ ”型, 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{\cos x} = -1$

4. 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$

【答案解析】

“ $\frac{0}{0}$ ”型, 原式 = $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{1} = 3$

5. 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$

【答案解析】

“ $\frac{0}{0}$ ”型, 原式 = $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x-1)}{2x} = \frac{1}{2}$

6. 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x}$

【答案解析】

“ $\frac{0}{0}$ ”型, 原式 = $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{\frac{1}{x}} = e$

7. 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{\sin(x^2 - 1)}$

【答案解析】

“ $\frac{0}{0}$ ”型, 原式 = $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x^2 - 4x}{2x \cos(x^2 - 1)} = \frac{5}{2}$

第七个考点相对来说在解答题里面是高频考点，一般考察求函数的极值。

(7) 函数的极值

设 $f(x)$ 在 x_0 的某领域内有定义。

(1) 如果 $x \neq x_0$ 时，恒有 $f(x) < f(x_0)$ 则称 x_0 为极大值点， $f(x_0)$ 为极大值

(2) 如果 $x \neq x_0$ 时，恒有 $f(x) > f(x_0)$ 则称 x_0 为极小值点， $f(x_0)$ 为极小值

极值存在的必要条件：

设函数 $f(x)$ 在 x_0 可导，且在点 x_0 处取得极值，则必有

$f'(x_0) = 0$ ，称满足 $f'(x_0) = 0$ 的点为函数 $f(x)$ 的驻点，

由此可知，可导函数的极值点必为驻点。

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 求函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 的极大值。

【答案解析】

$f'(x) = 3x^2 - 3$ ，令 $f'(x) = 0$ ，得驻点 $x_1 = -1, x_2 = 1$

又 $f''(x) = 6x$ ， $f''(-1) = -6 < 0$ ， $f''(1) = 6 > 0$

所以 $x_1 = -1$ 为极大值点， $f(-1) = 2$

2. 求函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5$ 的极值。

【答案解析】

$f'(x) = x^2 - x$ ，令 $f'(x) = 0$ 得到 $x = 1$ 或 $x = 0$

$f''(x) = 2x - 1$

$f''(1) = 1 > 0 \Rightarrow$ 为极小值点 $f(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 5 = \frac{29}{6}$

$f''(0) = -1 < 0 \Rightarrow$ 为极大值点 $f(0) = 5$

3. 设函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 在 $x = 2$ 处取得极值, 点 $(1, -1)$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 求 a, b, c .

【答案解析】

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c; f''(x) = 6ax + 2b \quad (1)$$

因为 $x = 2$ 处取得极值, $f'(2) = 12a + 4b + c = 0$

又点 $(1, -1)$ 为拐点

$$f''(1) = 6a + 2b = 0 \quad (2)$$

点 $(1, -1)$ 也在函数上代入得

$$f(1) = a + b + c = -1 \quad (3)$$

联立 (1) (2) (3) 解得

$$a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}, c = 0$$

第八个考点相对来说在解答题里面是高频考点，一般考察曲线的凹凸性及拐点。

(8) 曲线的凹凸性及拐点

曲线凹凸性的判别法：

设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数，那么

(1) 若在 (a,b) 内， $f''(x) > 0$ ，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的

(2) 若在 (a,b) 内， $f''(x) < 0$ ，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的

曲线的拐点：

在连续的曲线上的凹弧与凸弧之间的分界点称为曲线的拐点。

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 已知函数 $f(x) = x^4 - 4x + 1$

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间及极值

(2) 求曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间.

【答案解析】

$f'(x) = 4x^3 - 4$, $f''(x) = 12x^2$, 令 $f'(x) = 0$, $x = 1$, $f''(x) = 0$, $x = 0$

列表如下：

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	-	-4	-	0	+
y''	+	0	+	12	+

由表可知曲线 $f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty, 1)$ ，单调增区间为 $(1, +\infty)$
凹区间为 $(-\infty, +\infty)$ ，极小值为 $f(1) = 1 - 4 + 1 = -2$

2. 已知函数 $f(x) = \ln x - x$

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值

(2) 判断曲线 $y=f(x)$ 的凹凸性.

【答案解析】

$f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ， $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ ，令 $f'(x) = 0$ ，的驻点 $x = 1$

当 $0 < x < 1$ ， $f'(x) > 0$ ；当 $x > 1$ 时， $f'(x) < 0$

$f(x)$ 的单调增区间时 $(0, 1)$ ，单调减区间时 $(1, +\infty)$

$f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值 $f(1) = -1$

因为 $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ ，所以曲线是凸的.

第九个考点相对来说在解答题里面是必考点，一般考察求不定积分。

(9) 求不定积分的常用方法

一、换元积分法（凑微分法）

设 $f(u)$ 有原函数 $F(u)$ ，且 $u = v(x)$ ，则 $F[v(x)]$ 是 $f[v(x)]v'(x)$ 的原函数，即有：

$$\int f[v(x)]v'(x)dx = F[v(x)] + C$$

二、分部积分法

设 u 、 v 都是 x 的可微函数，则有

$$\int u dv = uv - \int v du$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 计算 $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

【答案解析】

设 $\sqrt{x} = t$ ，则 $x = t^2$ ， $dx = 2tdt$

$$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{e^{-t}}{t} \cdot 2tdt = 2 \int e^{-t} dt = -2e^{-t} + C = -2e^{-\sqrt{x}} + C$$

2. 计算 $\int x \cos x^2 dx$.

【答案解析】

$$\int x \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int \cos x^2 dx^2 = \frac{1}{2} \sin x^2 + C$$

3. 计算 $\int x \cos x dx$

【答案解析】分部积分法：

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

4. 计算 $\int x \arctan x dx$

【答案解析】分部积分法:

$$\begin{aligned} \int x \arctan x dx &= \int \arctan x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} \arctan x - \int \frac{x^2}{2} d(\arctan x) \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + C \end{aligned}$$

5. 计算 $\int (x^{\frac{1}{3}} + e^x) dx$

【答案解析】不定积分基本公式

$$\int x^{\frac{1}{3}} dx + \int e^x dx = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} x^{1+\frac{1}{3}} + e^x + C = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + e^x + C$$

6. 求 $\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$

【答案解析】换元法

令 $x = \sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 得到 $dx = \cos t dt$

$$\text{原式} = \int \frac{1}{\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}} \cdot \cos t dt = \int \frac{1}{\cos^2 t} dt = \tan t + C$$

又 $t = \arcsin x$

$$\Rightarrow \tan t + C = \tan(\arcsin x) + C$$

第十个考点相对来说在解答题里面是高频考点，一般考察求定积分。

(10) 定积分

$\int_a^b f(x)dx$ 称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

其中 $f(x)$ 称为被积函数， $f(x)dx$ 称为被积表达式， x 称为积分变量， $[a,b]$ 称为积分区间， a 称为积分下限， b 称为积分上限.

注意：

(1) 定积分若存在，它只是一个确定的常数，它只与被积函数 $f(x)$ 及积分区间 $[a,b]$ 有关，

而与积分变量的符号无关，即应有 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

(2) 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 中，上下限的大小没有限制，但若颠倒积分上下限，必须改变定积分

的符号，即 $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.特别地有 $\int_a^a f(x)dx = 0$

1.常数可以提到积分号之外，即若 k 为常数，则有 $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

2.两函数代数和的定积分等于它们的定积分的代数和即有

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

可以推广到有限个函数的代数和的情况.

3.定积分的可加性：如果积分区间 $[a,b]$ 被点 c 分成两个小区间 $[a,c]$ 与 $[c,b]$,

$$\text{则有 } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4.如果在区间 $[a,b]$ 上，总有 $f(x) \leq g(x)$,则有 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

牛顿 — 莱布尼茨公式

如果 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上任意一个原函数则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 计算 $\int_1^{\sqrt{e}} 2x \ln x dx$

【答案解析】

$$\int_1^{\sqrt{e}} 2x \ln x dx = \int_1^{\sqrt{e}} \ln x dx x^2 = x^2 \ln x \Big|_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e}{2} - \frac{x^2}{2} \Big|_1^{\sqrt{e}} = \frac{1}{2}$$

2. 计算 $\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$

【答案解析】

$$\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \ln x \Big|_1^e + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \Big|_1^e = \frac{3}{2}$$

3. 计算 $\int_0^4 f(x) dx$, 其中 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ \frac{1}{1+x}, & x \geq 1 \end{cases}$

【答案解析】

$$\text{原式} = \int_0^1 x dx + \int_1^4 \frac{1}{1+x} dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \ln(1+x) \Big|_1^4 = \frac{1}{2} + \ln \frac{5}{2}$$

4. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin 3t dt}{x^2}$.

【答案解析】

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin 3t dt}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} \int_0^x \sin 3t d(3t)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} (1 - \cos 3x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (3x)^2}{x^2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

5. 计算 $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx$.

【答案解析】

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx = \int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln^3 x} d(\ln x) = -\frac{1}{2(\ln x)^2} \Big|_e^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

第十一个考点相对来说在解答题里面是必考点，一般考察定积分的几何意义。

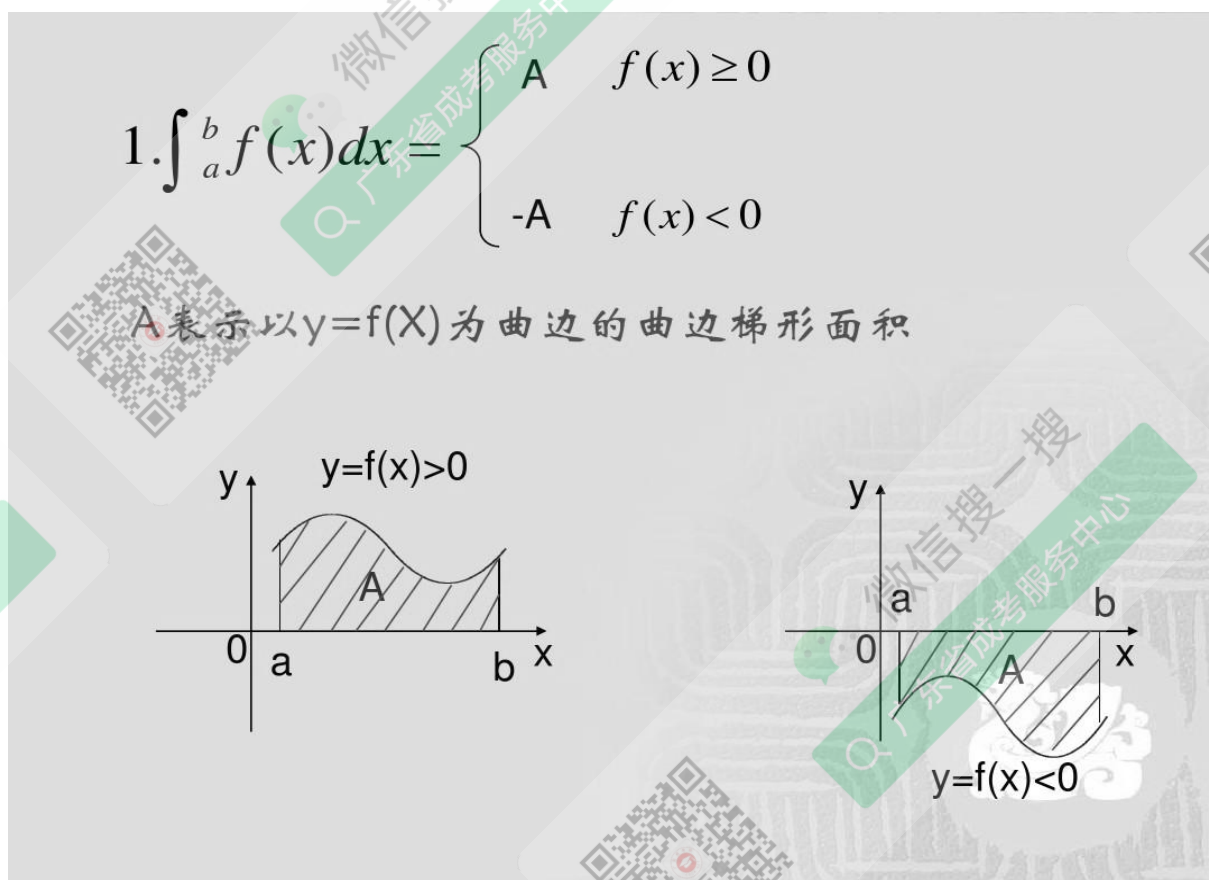
(11) 定积分的几何意义

(1) 当 $f(x) \geq 0$ 时，定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 表示由连续曲线 $y = f(x)$ ，直线 $x = a, x = b (a < b)$

和 x 轴所围成的曲边梯形 $aABb$ 的面积 S ，即 $S = \int_a^b f(x)dx$

(2) 当 $f(x) \leq 0$ 时，曲边梯形 $aABb$ 的面积 S 如图2. 即 $S = -\int_a^b f(x)dx$

如图：



以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 记曲线 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ 与直线 $y = 2$ 所围成的平面图形为 D ,

(1) 求 D 的面积 S . (2) 求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V .

【答案解析】

$$(1) S = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \left[2 - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right) \right] dx = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} \right) dx = 2\sqrt{3}$$

$$(2) V = \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 f^2(y) dy = \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 (2y-1) dy = \frac{3}{2}\pi$$

2. 求曲线 $y = x^3$ 与直线 $y = x$ 所围成的图形面积。

【答案解析】

由对称性可知

$$S = 2 \int_0^1 (x - x^3) dx = 2 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

3. 设曲线 $y = 4 - x^2 (x \geq 0)$ 与 x 轴、 y 轴及直线 $x = 4$ 所围成的平面图形为 D ,

(1) 求 D 的面积 S .

(2) 求 x 轴上方的阴影部分绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V .

【答案解析】

$$(1) \text{面积 } S = \int_0^2 (4 - x^2) dx - \int_2^4 (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 - \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_2^4 = 16$$

$$(2) \text{体积 } V = \pi \int_0^4 x^2 dy = \pi \int_0^4 (4 - y) dy = \pi \left(4y - \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_0^4 = 8\pi$$

4. 设 D 是由曲线 $x = 1 - y^2$ 与 x 轴、 y 轴，在第一象限围成得有限区域，求：

(1) D 的面积 S

(2) D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V

【答案解析】

$$(1) S = \int_0^1 (1 - y^2) dy = \left(y - \frac{1}{3}y^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$(2) V = \int_0^1 \pi y^2 dx = \pi \int_0^1 (1 - x) dx = \frac{\pi}{2}$$

第十二个考点相对来说在解答题里面是高频考点，一般考察求多元函数偏导数。

(12) 多元函数偏导数

定义：设 D 为 xOy 平面上的一个区域，如果对于 D 上的每一点 $P(x, y)$ ，变量 z 依照某一规律 f 有唯一确定的数值与之对应，则称 z 为 x, y 的函数，记作 $z = f(x, y)$ ，类似的可以定义三元函数，记作 $u = f(x, y, z)$ 二元及二元以上的函数统称多元函数。

偏导数的求法：

求二元函数 $z = f(x, y)$ 对 x 和 y 的偏导数，并不需要新的方法，当求 $f(x, y)$ 对 x 的偏导数时，只要将二元函数中的 y 看成是常数，而对 x 求导数就行了。

同理，求 $f(x, y)$ 对 y 的偏导数时，只要将二元函数中的 x 看成是常数，而对 y 求导数就行了。如果要求 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的偏导数，只需在偏导函数中将 $x = x_0, y = y_0$ 带入即可。

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 设函数 $z = x^2 \sin y + ye^x$ ，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$

【答案解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y + ye^x$$

2. 函数 $z = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ ，求 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y}$ 。

【答案解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y^2}$$

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = -1 + 1 = 0$$

第十三个考点相对来说在解答题里面是高频考点，一般考察求二阶偏导数。

(13) 二阶偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{xx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = f''_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = f''_{yx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{yy}(x, y)$$

称 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 为 $z = f(x, y)$ 的二阶混合偏导数。

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 设二元函数 $z = x^2 y^2 + x - y + 1$, 求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

【答案解析】

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 y - 1, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 + 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy$$

2. 设函数 $z = x^3 y + xy^3$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

【答案解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + y^3 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + y^3 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3x^2 + 3y^2$$

第十四个考点相对来说在解答题里面是高频考点，一般结合二阶偏导数求二元函数极值。

(14) 二元函数极值

解题思路：设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内连续，有一阶和二阶连续偏导数，且

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0 \text{ 又设 } f''_{xx}(x_0, y_0) = A, f''_{xy}(x_0, y_0) = B, f''_{yy}(x_0, y_0) = C$$

则 (1) 当 $B^2 - AC < 0$ 时，函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处取得极值，且当 $A < 0$ 时时有极大值，当 $A > 0$ 时有极小值。

(2) $B^2 - AC > 0$ 时，函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处无极值。

(3) $B^2 - AC = 0$ 时，函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处极值不能确定。

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 设函数 $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 3$ ，求 $f(x, y)$ 的极值点与极值。

【答案解析】

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x$$

$$\text{令 } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{驻点 } (0, 0)$$

$f(x, y)$ 的2阶偏导数为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \Rightarrow A = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(0,0)} = 2, B = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(0,0)} = 1, C = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{(0,0)} = 2$$

因为 $A > 0$ ，且 $AC - B^2 > 0$ 所以 $(0, 0)$ 为 $f(x, y)$ 的极小值点，极小值 $f(0, 0) = 3$

2. 设二元函数 $z = x^2 + xy + y^2 + x - y - 5$, 求 z 的极值.

【答案解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y + 1, \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + x + 1$$

$$\text{令} \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{驻点 } (-1, 1)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \Rightarrow A = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{(0,0)} = 2, B = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(0,0)} = 1, C = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{(0,0)} = 2$$

因为 $A > 0$, 且 $B^2 - AC < 0$ 所以 $(-1, 1)$ 为 $f(x, y)$ 的极小值点, 极小值 $f(-1, 1) = 6$

3. 求二元函数 $f(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy + y^2 + 3x$ 的极值.

【答案解析】

$$f'_x = x - y + 3, f'_y = -x + 2y$$

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$f''_{xx}(x, y) = 1, f''_{xy}(x, y) = -1, f''_{yy}(x, y) = 2$$

$$A = f''_{xx}(-6, -3) = 1, B = f''_{xy}(-6, -3) = -1, C = f''_{yy}(-6, -3) = 2$$

$$B^2 - AC = -1 < 0, A > 0$$

所以 $(-6, -3)$ 为 $f(x, y)$ 的极小值点, 极小值 $f(-6, -3) = -9$

第十五个考点对于高数二同学来说在解答题里面是必考点，一般考察随机变量 X 的概率、数学期望及方差。

(15) 概率初步 (只针对高数二考生)

事件的关系:

(1) 事件的包含与相等关系

设 A, B 为两个事件, 如果事件 A 发生, 必然导致事件 B 发生. 则事件 B 包含事件 A , 或事件 A 包含于事件 B , 记作 $A \subset B$, 或 $B \supset A$. 如果事件 A 包含事件 B , 事件 B 又包含事件 A , 则称 A, B 事件相等 $A = B$.

(2) 设 A, B 为两个事件, $A \cup B$ (或 $A+B$) 表示事件 A 与 B 中至少有一个发生.

$A \cap B$ (或 $A \cdot B$ 或 AB) 表示事件 A 与 B 同时发生.

(3) 事件互不相容或对立关系

如果事件 A 与事件 B 在同一次实验中不能同时发生, 即 $AB = \emptyset$,

称事件 A 与 B 是互不相容的 (或互斥的),

也称 A 与 B 互斥. 设有事件 A , 事件 A 不发生为事件 A 的逆 (或者 A 的对立事件) 记作 \bar{A} , 若 $B = \bar{A}$, 则 A, B 具有对立关系.

概率的性质:

定义: 设 E 为含有 n 个基本事件的古典型实验, A 为由 m 个基本事件组成的随机事件,

那么 A 的概率为 $P(A) = \frac{m}{n}$, 则称这样定义的概率为概率的古典型定义.

基本性质:

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$ (2) $P(\Omega) = 1$

(3) 有限可加性: 若 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互斥, 则 $P(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$

(4) 加法定理: 若 A, B 为任意两个随机事件, 则 $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

(5) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

离散性随机变量的数学期望:

定义: 设离散型随机变量 ξ 的概率分布为 则称 $\sum_{i=1}^n x_i p_i$ 为 ξ 的数学期望或均值, 记作 $E(\xi)$

则称 $\sum_{i=1}^n [x_i - E(\xi)]^2 p_i$, 则称此级数的和为 ξ 的方差, 记作 $D(\xi)$

则称 $\sqrt{D(\xi)}$ 为随机变量 ξ 的标准差.

ξ	x_1	x_2	\dots	x_n
$P(\xi = x_i)$	P_1	P_2	\dots	P_n

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 设50件产品中,45件是正品,5件是次品,从中任取3件求其中至少有1件是次品的概率.(精确到0.01)

【答案解析】

设 $A = \{3\text{件产品中至少有1件次品}\}$ 则 $\bar{A} = \{3\text{件产品都为品}\}$

$$\text{所以 } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{45}^3}{C_{50}^3} \approx 0.28$$

2. 设离散型随机变量 X 的概率分布为:

X	0	1	2
P	0.3	0.4	0.3

求 X 的数学期望 EX 及方差 DX .

【答案解析】

$$E(X) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.3 = 1$$

$$E(X^2) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.4 + 2^2 \times 0.3 = 1.6$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1.6 - 1 = 0.6$$

3. 设离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	10	20	30
P	0.2	a	0.2	0.3

(1) 求常数 a .

(2) 求 X 的数学期望 EX 及方差 DX .

【答案解析】

$$(1) 0.2 + a + 0.2 + 0.3 = 1 \Rightarrow a = 0.3$$

$$(2) EX = 0 \times 0.2 + 10 \times 0.3 + 20 \times 0.2 + 30 \times 0.3 = 16$$

$$DX = (0-16)^2 \times 0.2 + (10-16)^2 \times 0.3 + (20-16)^2 \times 0.2 + (30-16)^2 \times 0.3 = 124$$

4. 从装有 2 个白球, 3 个黑球的袋中任取 3 个球, 记取出白球的个数为 X .

(1) 求 X 的概率分布.

(2) 求 X 的数学期望 $E(X)$.

【答案解析】

(1) X 的可能值为 0, 1, 2

$$P\{X=0\} = \frac{C_2^0 \cdot C_3^3}{C_5^3} = 0.1$$

$$P\{X=1\} = \frac{C_2^1 \cdot C_3^2}{C_5^3} = 0.6$$

$$P\{X=2\} = \frac{C_2^2 \cdot C_3^1}{C_5^3} = 0.3$$

因此 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

$$(2) E(X) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.6 + 2 \times 0.3 = 1.2$$

5. 设离散型随机变量 X 的概率分布为

X	10	20	30	40
P	0.2	0.1	0.5	a

(1) 求常数 a .

(2) 求 X 的数学期望 EX .

【答案解析】

$$(1) 0.2 + 0.1 + 0.5 + a = 1, \text{ 所以 } a = 0.2$$

$$(2) EX = 10 \times 0.2 + 20 \times 0.1 + 30 \times 0.5 + 40 \times 0.2 = 27$$

第十六个考点对于高数一同学来说在解答题里面是一般考点，一般考察无穷级数的收敛性。

(16) 无穷级数 (只针对高数一考生)

一、无穷级数:

(一) 定义: 设有数列 $\{u_n\} (n=1,2,\dots)$, 称表达式 $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为无穷级数, 简称级数, 而称 u_1 为首项, u_n 为级数的一般项。

(二) 收敛与发散

如果数列 $\{S_n\}$ 有极限, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 极限值 S 称为级数的和,

或者说级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S , 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$. 反之, 若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 则称级数发散。

(三) 收敛级数的必要条件

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 由此可知: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定发散

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 0$, 级数的收敛性不能判断, 如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛。

(四) 绝对收敛与条件收敛

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定收敛, 此时 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 称为绝对收敛

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 此时收敛为条件收敛

(五) 判定方法

1. 比较判别法

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 皆为正项级数, 且 $0 \leq u_n \leq v_n (n=1,2,\dots,n)$. 则

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛。

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 必发散。

2. 比值判别法 (达朗贝尔判别法)

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则 $\begin{cases} \rho < 1 \text{ 时收敛} \\ \rho > 1 \text{ 时发散} \\ \rho = 1 \text{ 时不定} \end{cases}$

如果 u_n 常有因子 n , 用这种方法判别正项级数的收敛性比较方便

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{5^n}$ 的收敛性.

【答案解析】

因为 $u_n = \frac{5n+1}{5^n} > 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5(n+1)+1}{5^{n+1}}}{\frac{5n+1}{5^n}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5n+6}{5n+1}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \cdot \frac{5n+6}{5n+1} = \frac{1}{5} < 1$, 所以原级数收敛。

第十七个考点对于高数一同学来说在解答题里面是必考点，一般考察一阶和二阶微分方程的通解。

(17) 常微分方程 (只针对高数一同学)

一阶微分方程解法:

- (1) 可分离变量的解法
- (2) 一阶线性微分方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \text{ 的解法, 可用公式法求解 } y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right]$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. 求微分方程 $y \frac{dy}{dx} = x^2$ 的通解.

【答案解析】

$$y dy = x^2 dx$$

$$\text{两边同时积分, } \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{3} x^3 + C_1$$

$$3y^2 = 2x^3 + C_1$$

$$\text{即 } y^2 = \frac{2}{3} x^2 + C$$

2. 求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = x$ 的通解.

【答案解析】

公式法:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right] = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[\int x e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right] = \frac{1}{x} (\int x^2 dx + C)$$

$$= \frac{1}{x} \left(\frac{1}{3} x^3 + C \right)$$

二阶常系数线性微分方程:

$y'' + py' + qy = 0$ 的通解形式

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根 r_1, r_2

(1) $\Delta = p^2 - 4q > 0$,两个不等的实根 r_1, r_2 , $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

(2) $\Delta = p^2 - 4q = 0$,两个相等的实根 r_1, r_2 , $y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$

(3) $\Delta = p^2 - 4q < 0$,一对共轭复根 $r_1, r_2 = \alpha \pm \beta i$, $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

若 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 为对应的齐次方程的通解, y^* 为非齐次方程的特解

则 $C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*$ 为非齐次方程的通解

以下是我们历年考试的真题,我们可以进行练习下,掌握上面的知识点,可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.求微分方程 $y'' - y' - 2y = e^x$ 的通解.

【答案解析】

对应得齐次微分方程得特征方程为 $r^2 - r - 2 = 0$.特征根 $r_1 = -1, r_2 = 2$

齐次方程得通解为 $Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$.

设原方程得特解 $y^* = Ae^x$, 带入原方程可得 $A = -\frac{1}{2}$, 因此 $y^* = -\frac{1}{2}e^x$

故原方程得通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{2}e^x (C_1, C_2 \text{为任意常数}).$$

2.求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = e^x$ 的通解.

【答案解析】

$y'' + 3y' + 2y = e^x$ 对应得齐次微分方程得特征方程为 $r^2 + 3r + 2 = 0$.

特征根 $r_1 = -2, r_2 = -1$, 齐次方程得通解为 $Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$.

设原方程得特解 $y^* = Ae^x$, 带入原方程可得 $A = \frac{1}{6}$

故原方程得通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{6}e^x (C_1, C_2 \text{为任意常数}).$$

3.求微分方程 $y'' - 5y' - 6y = 0$ 的通解.

【答案解析】

特征方程为 $r^2 - 5r - 6 = 0$,求得 $r_1 = -1$ 或 $r_2 = 6$

故微分方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{6x}$ (C_1, C_2 为任意常数)

四、高等数学各部分考点通关练习

(1) 无穷小量及无穷大量定义及性质

【课后巩固练习】

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列函数为无穷小量的是 ()

A. e^x B. $\frac{\sin x}{x}$ C. $\cos x$ D. $\sin x$

2. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列变量为无穷小量的是 ()

A. e^x B. $\ln x$ C. $x \sin \frac{1}{x}$ D. $\frac{1}{x} \sin x$

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列函数为无穷大量的是 ()

A. $\frac{x}{0.01}$ B. $\sqrt{|x|}$ C. 2^{-x} D. $\frac{1+2x}{x}$

【课后练习答案解析】

1. 【答案解析】 D

A: $\lim_{x \rightarrow 0} e = e$

B: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

C: $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

D: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

答案选 D

2.【答案解析】 C

$$A: \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x} = +\infty$$

$$B: \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$C: \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$D: \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \sin x = 1$$

答案选 C

3.【答案解析】 D

$$A: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{0.01} = 0$$

$$B: \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} = 0$$

$$C: \lim_{x \rightarrow 0} 2^{-x} = 1$$

$$D: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + 2\right) = \infty$$

答案选 D

(2) 无穷小量的比较及替换

【课后巩固练习】

1. 设 $f(x) = 2x^2$, $g(x) = \sin x$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时 ()

- A. $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小量
- B. $f(x)$ 是比 $g(x)$ 低阶的无穷小量
- C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 同阶但非等价的无穷小量
- D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小量

2. 设 $f(x) = e^{-x^2} - 1$, $g(x) = x^2$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时 ()

- A. $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小量
- B. $f(x)$ 是比 $g(x)$ 低阶的无穷小量
- C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 同阶但非等价的无穷小量
- D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小量

【课后练习答案解析】

1. 【答案解析】 A

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$$

答案选 A

2. 【答案解析】 C

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

答案选 C

(3) 两个重要极限

【课后巩固练习】

1. 下列格式正确的是 ()

$$A. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad B. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 1 \quad C. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 0 \quad D. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{x} = 0$$

$$2. \text{极限 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n =$$

$$A. e^{-3} \quad B. e^{\frac{1}{3}} \quad C. e^{\frac{1}{3}} \quad D. e^3$$

$$3. \text{求极限 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x}$$

$$4. \text{设极限 } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = e^a, \text{ 则 } a = ()$$

$$A. -2 \quad B. -\frac{1}{2} \quad C. \frac{1}{2} \quad D. 2$$

【课后练习答案解析】

1. 【答案解析】 D

$$A: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x = 0 \neq 1, \text{ 错误}$$

$$B: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2 \neq 1, \text{ 错误}$$

$$C: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0, \text{ 错误}$$

$$D: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \sin 2x = 0, \text{ 正确}$$

2. 【答案解析】 A

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3} \cdot (-3)} = e^{-3}$$

3. 【答案解析】

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3} \cdot 6} = e^6$$

4. 【答案解析】 D

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{2x} \cdot 2} = e^2 = e^a = e^a$$

$$a = 2$$

(4) 函数连续性

【课后巩固练习】

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (1+5x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续, 求 a .

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}}, & x < 0 \\ x+2, & x \geq 0 \end{cases}$, 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

3. 求常数 a 的值, 使函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x}, & x < 0 \\ 1+x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续, 则 $k = (\quad)$

A. 0 B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2

【课后练习答案解析】

1. 【答案解析】连续性定义, 函数在 $x=0$ 处连续

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{1}{x}} = f(0) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{1}{5x}} = e^5 = a$$

2. 【答案解析】

考察连续性定义

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+2) = 0+2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})} \quad (\text{分母有理化})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+\sqrt{1-x}) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

3.【答案解析】

$$\text{连续性定义: } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

由于在 $x=0$ 处连续

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin ax}{x}$$

$$1+0 = \frac{ax}{x} = a$$

$$a = 1$$

4.【答案解析】

连续性定义, 函数在 $x=0$ 处连续

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} = f(0) = k$$

$$k = \frac{1}{4}$$

(5) 函数间断点

【课后巩固练习】

1. 函数 $f(x) = \frac{x+1}{x-1} + e^{\frac{2}{x}}$ 的所有间断点是 ()

A. $x=0$ B. $x=1$ C. $x=0, x=1$ D. $x=-1, x=1$

2. 函数 $f(x) = \frac{x+1}{(x-2)(x-3)}$ 的所有间断点为 ()

A. $x=-1$ B. $x=2$ C. $x=3$ D. $x=2, x=3$

【课后练习答案解析】

1. 【答案解析】 C

$x-1=0$, 即 $x=1$ 时, 另外 $x=0$, 函数 $f(x)$ 无定义, 则函数 $f(x)$ 的间断点是 $x=1, x=0$

2. 【答案解析】 D

$x-2=0$, 即 $x=2$ 时; 另外 $x-3=0$, 即 $x=3$ 时, 函数 $f(x)$ 无定义,

则函数 $f(x)$ 的间断点是 $x=2, x=3$

(6) 导数定义公式

【课后巩固练习】

1. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 $f'(x_0) = \frac{1}{3}$ 求极限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 3h) - f(x_0)}{h}$

2. 设函数 $f(x) = x^2$, 则极限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = (\quad)$

A. 5 B. 10 C. 15 D. 20

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 则 $f'(1) = (\quad)$

A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(1)}{x}$

C. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x}$ D. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$

4. 设函数 $f(x)$ 可导, 则极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+2\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$

A. $\frac{1}{2} f'(x)$ B. $-\frac{1}{2} f'(x)$ C. $2f'(x)$ D. $-2f'(x)$

【课后练习答案解析】

1. 【答案解析】

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 3h) - f(x_0)}{h} = -3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 3h) - f(x_0)}{-3h} = -3f'(x_0) = -3 \times \frac{1}{3} = -1$$

2. 【答案解析】 B

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = f'(5), \text{ 又 } f(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = 2x \Rightarrow f'(5) = 2 \times 5 = 10$$

3. 【答案解析】 D

$$\text{函数 } f(x) \text{ 在 } x=1 \text{ 处可导} \Rightarrow f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$

4. 【答案解析】 C

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+2\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+2\Delta x) - f(x)}{2\Delta x} = 2f'(x)$$

(7) 导数的几何意义

【课后巩固练习】

1. 设曲线 $y = ax^2 + 2x$ 在点 $(1, a+2)$ 处的切线与直线 $y = 4x$ 平行, 则 $a =$ _____
2. 曲线 $y = x^2 - x$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线斜率为 _____
3. 曲线 $y = \sin(x+1)$ 在点 $(-1, 0)$ 处的切线斜率为 _____

【课后练习答案解析】

1. 【答案解析】 曲线在点处的切线与直线 $y = 4x$ 平行 $\Rightarrow k = y'|_{x=1} = 2ax + 2 = 2a + 2 = 4 \Rightarrow a = 1$
2. 【答案解析】 $k = y'|_{x=1} = 2x - 1|_{x=1} = 1$
3. 【答案解析】 $k = y'|_{x=-1} = \cos(x+1)|_{x=-1} = 1$

(8) 求导方法

【课后巩固练习】

1. 设 $y = 5^n$, 则 $y' =$ _____
2. 设 $y = x + \cos x$, 则 $y' =$ _____
3. 设 $y = x^2 e^x$, 则 $y' =$ _____
4. 设 $y = \frac{e^x}{x}$, 则 $y' =$ _____

【课后练习答案解析】

1. 【答案解析】 $y' = 5^n \ln 5$
2. 【答案解析】 $y' = 1 - \sin x$
3. 【答案解析】 $y' = 2xe^x + x^2 e^x$
4. 【答案解析】 $y' = \frac{e^x x - e^x}{x^2}$

(9) 复合函数求导

【课后巩固练习】

1. 设函数 $y = \sin(\ln x)$, 求 y'
2. 设函数 $f(x) = \ln(\cos x)$, 求 y'
3. 设函数 $f(x) = \cos(2x^2 + 6x)$, 求 y'
4. 已知函数 $y = 2^{\ln(x^2+1)}$, 求 y' .

【课后练习答案解析】

1. 【答案解析】 $y = \sin(\ln x)$

$$y' = \cos(\ln x) \cdot (\ln x)' = \frac{\cos(\ln x)}{x}$$

2. 【答案解析】 $f(x) = \ln(\cos x)$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x} (\cos x)' = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

3. 【答案解析】 $f(x) = \cos(2x^2 + 6x)$

$$f'(x) = -\sin(2x^2 + 6x) \cdot (2x^2 + 6x)' = -(4x + 6)\sin(2x^2 + 6x)$$

4. 【答案解析】 $y = 2^{\ln(x^2+1)}$

$$y' = 2^{\ln(x^2+1)} \cdot \ln 2 \cdot [\ln(x^2+1)]' = 2^{\ln(x^2+1)} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot (x^2+1)' = 2^{\ln(x^2+1)} \cdot \ln 2 \cdot \frac{2x}{x^2+1}$$

(10) 隐函数求导

【课后巩固练习】

1. 设 $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ (t 为参数), 求 $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=1}$.

2. 设 $\begin{cases} x = 2t^2 + 1 \\ y = \sin t \end{cases}$ (t 为参数), 求 $\frac{dy}{dx}$.

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3t}{2}, \frac{dy}{dx}\Big|_{t=1} = \frac{3}{2}$$

2.【答案解析】

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t}{4t}$$

【课后巩固练习】

1. 函数 $y = y(x)$ 是由方程 $y = \sin(x + y)$ 所确定的隐函数, 求 y' .

2. 若由 $e^y = xy$ 确定 y 是 x 的函数, 则 $y' =$ _____

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】

$y = \sin(x + y)$, 两边同时对 x 求导, 得

$$y' = \cos(x + y) \cdot (1 + y') \Rightarrow y' = \frac{\cos(x + y)}{1 - \cos(x + y)}$$

2.【答案解析】

$e^y = xy$, 两边同时对 x 求导, 得

$$e^y \cdot y' = y + xy' \Rightarrow y' = \frac{y}{e^y - x}$$

(11) 高阶求导

【课后巩固练习】

1. $y = x^3 + 2$, 求 $y'' =$ ____

2. 设 $y = \sin x$, 求 $y'' =$ ____

3. 设 $y = e^{-x}$, 求 $y'' =$ ____

4. 设 $f(x) = e^{2x}$, 求 $y''' =$ ____

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】

$$y = x^3 + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 \Rightarrow y'' = 6x$$

2.【答案解析】

$$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x \Rightarrow y'' = -\sin x$$

3.【答案解析】

$$y = e^{-x} \Rightarrow y' = -e^{-x} \Rightarrow y'' = e^{-x}$$

4.【答案解析】

$$y = e^{2x} \Rightarrow y' = 2e^{2x} \Rightarrow y'' = 4e^{2x} \Rightarrow y''' = 8e^{2x}$$

(12) 微分【课后巩固练习】1. 设 $y = 3\ln x$, 则 $dy =$ _____

A. $\frac{3}{x} dx$ B. $3e^x dx$ C. $\frac{1}{3x} dx$ D. $\frac{1}{3} e^x dx$

2. 设 $y = e^{x-3}$, 则 $dy =$ _____3. 设 $y = x + \ln x$, 则 $dy =$ _____4. 设函数 $y = \cos x + 1$, 则 $dy =$ _____5. 设函数 $y = e^{-3x}$, 则 $dy =$ _____**【课后练习答案解析】****1.【答案解析】**

$$y = 3\ln x \Rightarrow y' = \frac{3}{x} \Rightarrow dy = \frac{3}{x} dx$$

2.【答案解析】

$$y = e^{x-3} \Rightarrow y' = e^{x-3} \Rightarrow dy = e^{x-3} dx$$

3.【答案解析】

$$y = x + \ln x \Rightarrow y' = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow dy = (1 + \frac{1}{x}) dx$$

4.【答案解析】

$$y = \cos x + 1 \Rightarrow y' = -\sin x \Rightarrow dy = -\sin x dx$$

5.【答案解析】

$$y = e^{-3x} \Rightarrow y' = -3e^{-3x} \Rightarrow dy = -3e^{-3x} dx$$

(13) 洛必达法则【课后巩固练习】

1. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}$.

2. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$.

3. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - e^x}{\sin x}$.

4. 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x + \ln x}{x^3 - 1}$.

【课后练习答案解析】**1.【答案解析】**

“ $\frac{0}{0}$ ”型, 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$

2.【答案解析】

“ $\frac{0}{0}$ ”型, 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\cos x} = 2$

3.【答案解析】

“ $\frac{0}{0}$ ”型, 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{-x} - e^x}{\cos x} = -2$

4.【答案解析】

“ $\frac{0}{0}$ ”型, 原式 = $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1 + \frac{1}{x}}{3x^2} = 0$

(14) 导数的应用

【课后巩固练习】

1. 设函数 $f(x) = x - \ln x$, 求 $f(x)$ 的单调增区间.

2. 函数 $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ 的单调减少区间为 _____.

3. 求函数 $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$ 的单调区间及极值、凹凸区间.

4. 求函数 $f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$ 的单调区间及极值极值、凹凸区间.

5. 曲线 $y = x^3 + 3x^2 + 1$ 的拐点坐标为 _____.

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】

定义域为 $x > 0$, 即 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, 令 $f'(x) > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} > 0$

$\Rightarrow (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

2.【答案解析】

$f'(x) = x^2 - 1$, 令 $f'(x) < 0 \Rightarrow x^2 - 1 < 0 \Rightarrow (-1, 1)$

3.【答案解析】

$y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$

$y' = x^2 - 4$, 令 $y' = 0$, $x = \pm 2$

$y'' = 2x$, 令 $y'' = 0$, $x = 0$

列表如下:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y'	+	0	-		-	0	+
y''	-		-	0	+		+
y		极大值				极小值	

极大值为 $f(-2) = \frac{19}{3}$ 极小值为 $f(2) = \frac{13}{3}$

单调增区间为 $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ 单调减区间为 $(-2, 2)$

凹区间为 $(0, +\infty)$ 凸区间为 $(-\infty, 0)$

4【答案解析】

$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$f'(x) = 2x + \frac{2}{x^2}$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -1$

$f''(x) = 2 - \frac{4}{x^3}$, 令 $f''(x) = 0$, 得 $x = \sqrt[3]{2}$ 列表如下:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	$(0, \sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2}, +\infty)$
y'	-	0	+	+	+	+
y''	+	+	+	-	0	+
y		极小				

极小值 $f(-1) = 3$

凹区间 $f''(x) < 0$, $(0, \sqrt[3]{2})$

凸区间 $f''(x) > 0$, $(-\infty, 0) \cup (\sqrt[3]{2}, +\infty)$

5【答案解析】

$y' = 3x^2 + 6x$, 令 $y' = 0$, $x = 0$ 或 $x = -2$

$y'' = 6x + 6$, 令 $y'' = 0$, $x = -1$

列表如下:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y'	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-	-	0	+	+	+
y				拐点			

$(-1)^3 + 3x(-1)^2 + 1 = 3$

所以拐点坐标为 $(-1, 3)$

(15) 曲线的水平渐近线与铅直渐近线**【课后巩固练习】**

1. 曲线 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 的铅直渐近线为 ()

A. $x = -1$ B. $x = 1$ C. $y = -1$ D. $y = 1$

2. 曲线 $y = \frac{1}{1-x^2}$ 的铅直渐近线条数为 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. 曲线 $y = \frac{3x-1}{x-1}$ 的水平渐近线为 _____

4. 曲线 $y = \frac{x}{x^2-1}$ 的水平渐近线为 _____

【课后练习答案解析】**1.【答案解析】**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} = \infty \Rightarrow x = 1$$

2.【答案解析】

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{1-x^2} = \infty \Rightarrow 1-x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

3.【答案解析】

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 3 \Rightarrow y = 3$$

4.【答案解析】

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0 \Rightarrow y = 0$$

(16) 不定积分的性质及公式

【课后巩固练习】

1. $\int 5 \cos x dx = \underline{\hspace{2cm}}$

2. $\int 3x dx = \underline{\hspace{2cm}}$

3. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

4. $\int (1 - \frac{1}{x}) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

5. $\int \frac{1}{x^3} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

【课后练习答案解析】

1. 【答案解析】 $\int 5 \cos x dx = 5 \sin x + C$

2. 【答案解析】 $\int 3x dx = \frac{3}{2}x^2 + C$

3. 【答案解析】 $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

4. 【答案解析】 $\int (1 - \frac{1}{x}) dx = \int 1 dx - \int \frac{1}{x} dx = x - \ln|x| + C$

5. 【答案解析】 $\int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2}x^{-2} + C$

(17) 求不定积分的常用方法

【课后巩固练习】

1. 计算 $\int x\sqrt{x^2-1}dx$.

2. 计算 $\int \frac{1}{x(1+x)}dx$.

3. 计算 $\int \frac{1+\ln x}{x}dx$.

4. 计算 $\int \arcsin x dx$.

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】

$$\int x\sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2-1}d(x^2-1) = \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2-1}d(x^2-1) = \frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}} + C$$

2.【答案解析】

$$\int \frac{1}{x(1+x)}dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right)dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{1+x}dx = \ln|x| - \ln|x+1| + C$$

3.【答案解析】

$$\int \frac{1+\ln x}{x}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{\ln x}{x}dx = \ln|x| + \int \ln x d \ln x = \ln|x| + \frac{1}{2} \ln^2 x + C$$

4.【答案解析】

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

(18) 定积分

【课后巩固练习】

1. $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

2. $\int_0^1 (\sqrt{x} + x^2) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

3. $\int_{-1}^1 x^5 dx = \underline{\hspace{2cm}}$

4. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = \underline{\hspace{2cm}}$

5. $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

2.【答案解析】

$$\int_0^1 (\sqrt{x} + x^2) dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx + \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 + \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

3.【答案解析】

$$\int_{-1}^1 x^5 dx = \frac{1}{6} x^6 \Big|_{-1}^1 = 0$$

4.【答案解析】

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

5.【答案解析】

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{e}$$

(19) 定积分的几何意义

【课后巩固练习】

1. 设L是曲线 $y = x^2 + 3$ 在点(1,4)处的切线, 求由该曲线、切线L及y轴围成的平面图形的面积S.
2. 已知函数 $y = -x^2 + 2x$, 求曲线与x轴围成的平面图形的面积S.
3. 设D是由直线 $y = x$ 与 $y = x^3$ 在第一象限所围成的图形, 求D的面积S
4. 设D为曲线 $y = 1 - x^2$, 直线 $y = x + 1$, 与x轴围成的平面图形, 求D的面积S

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】

$$y' = 2x, k = 2, \text{切线方程 } y = 2x + 2$$

$$S = \int_0^1 [(x^2 + 3) - (2x + 2)] dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

2.【答案解析】

$$S = \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 \Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

3.【答案解析】

$$S = \int_0^1 (x - x^3) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

4.【答案解析】

$$S = \int_{-1}^0 (x + 1) dx + \int_0^1 (1 - x^2) dx = \frac{1}{2}(x + 1)^2 \Big|_{-1}^0 + \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{6}$$

(20) 多元函数偏导数

【课后巩固练习】

1. 设 $z = x^2y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$

2. 设函数 $z = x^3 + y^3$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$

3. 设 $z = \arcsin x + e^y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$

4. 设 $z = x^2y + xy^2$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$

5. 设函数 $z = \sin(xy)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】

$$z = x^2y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy$$

2.【答案解析】

$$z = x^3 + y^3 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2$$

3.【答案解析】

$$z = \arcsin x + e^y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = e^y$$

4.【答案解析】

$$z = x^2y + xy^2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2$$

5.【答案解析】

$$z = \sin(xy) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = y \cos(xy)$$

(21) 二元函数极值

【课后巩固练习】

1. 设函数 $z = e^x + y^2$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$ _____

2. 求二元函数 $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y$ 的极值.

3. 设函数 $z = x^2 y^3$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$ _____

4. 设函数 $z = xy$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____

5. 设函数 $z = \ln(xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$ _____

6. 设函数 $z = x^2 y - xy^3$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】

$$z = e^x + y^2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = e^x \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x$$

2.【答案解析】

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{驻点 } (0, -1)$$

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$A > 0, B^2 - AC = -4 < 0$$

$f(x, y)$ 在点 $(0, -1)$ 处取得极小值, $f(0, -1) = -1$

3.【答案解析】

$$z = x^2 y^3 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^3$$

4.【答案解析】

$$z = xy \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = y \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$$

5.【答案解析】

$$z = \ln(xy) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}$$

6.【答案解析】

$$z = x^2 y - xy^3 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy - y^3 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x - 3y^2$$

(22) 全微分

【课后巩固练习】

1. $z = x^2 - y$, 则 $dz =$ _____

2. 设函数 $z = x^3 e^y$, 则 $dz =$ _____

3. 设函数 $z = e^x + y$, 则 $dz =$ _____

4. 设函数 $z = 2x + y^2$, 则 $dz =$ _____

5. 设函数 $z = x^2 y + 2y^2$, 求 dz .

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】

$$z = x^2 - y, \frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = -1 \Rightarrow dz = 2x dx - dy$$

2.【答案解析】

$$z = x^3 e^y, \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 e^y, \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 e^y \Rightarrow dz = 3x^2 e^y dx + x^3 e^y dy$$

3.【答案解析】

$$z = e^x + y, \frac{\partial z}{\partial x} = e^x, \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \Rightarrow dz = e^x dx + dy$$

4.【答案解析】

$$z = 2x + y^2, \frac{\partial z}{\partial x} = 2, \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \Rightarrow dz = 2dx + 2ydy$$

5.【答案解析】

$$z = x^2 y + 2y^2, \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy, \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 4y \Rightarrow dz = 2xydx + (x^2 + 4y)dy$$

(23) 概率初步 (只针对高数二考生)**【课后巩固练习】**

1. 任意三个事件, M, N, K 中至少有一个发生的是 ()

A. $M \cup N \cup K$ B. $M \cup N \cap K$ C. $M \cap N \cap K$ D. $M \cap N \cup K$

2. 有10件产品, 其中8件是正品, 2件是次品, 甲、乙两人先后各抽取一件产品
求甲先抽到正品的前提下, 乙抽到正品的概率。

3. 袋中有8个乒乓球, 其中5个白色球, 3个黄色球, 从中1次任取2个乒乓球, 则取出的
2个球均为白球的概率为 _____

4. 设 A, B 为两个随机事件, 且 $P(A) = 0.8, P(AB) = 0.3$, 求 $P(A - B)$.

5. 设离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	0.2	0.1	0.3	a

(1) 求常数 a .

(2) 求 X 的数学期望 EX .

【课后练习答案解析】

1. 【答案解析】 A

2. 【答案解析】

$$P = \frac{C_7^1}{C_9^1} = \frac{7}{9}$$

3. 【答案解析】

$$P = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5}{14}$$

4. 【答案解析】

$$P(A - B) = P(A) - P(AB) = 0.8 - 0.3 = 0.5$$

5. 【答案解析】

$$(1) 0.2 + 0.3 + 0.1 + a = 1 \Rightarrow a = 0.4 \quad (2) EX = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.1 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.4 = 1.9$$

(24) 常微分方程

【课后巩固练习】

1. 求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = 6e^x$ 的通解.

2. 微分方程 $dy + xdx = 0$ 的通解 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

3. 求 $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ 的通解.

4. 微分方程 $y' - y = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$

5. 微分方程 $y' = 3x^2y$ 的通解 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

6. 求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = 0$ 的通解.

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】

$y'' + 3y' + 2y = 6e^x$ 对应得齐次微分方程得特征方程为 $r^2 + 3r + 2 = 0$.

特征根 $r_1 = -2$, $r_2 = -1$, 齐次方程得通解为 $Y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}$.

设原方程得特解 $y^* = Ae^x$, 带入原方程可得 $A = 1$

故原方程得通解为

$y = Y + y^* = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + e^x$ (C_1, C_2 为任意常数).

2.【答案解析】

$dy = -xdx \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x^2 + C$

3.【答案解析】

公式法:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right] = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[\int x^2 e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right] = x \left[\int x dx + C \right]$$

$$x \left(\frac{x^2}{2} + C \right) = \frac{x^3}{2} + Cx$$

$$4. dy = -x dx \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

4.【答案解析】

$$y' - y = 0 \Rightarrow y' = y \Rightarrow \frac{1}{y} dy = dx \Rightarrow \ln y = x \Rightarrow y = Ce^x$$

5.【答案解析】

$$y' = 3x^2 y \Rightarrow \frac{1}{y} dy = 3x^2 dx \Rightarrow \ln y = x^3 \Rightarrow y = Ce^{x^3}$$

6.【答案解析】

$y'' + 3y' + 2y = 0$ 对应得齐次微分方程得特征方程为 $r^2 + 3r + 2 = 0$.

特征根 $r_1 = -2$, $r_2 = -1$, 齐次方程得通解为 $Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$.

故原方程得通解为

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} (C_1, C_2 \text{ 为任意常数}).$$