一、选择题（1~10，每小题 4 分，共 40 分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{3x}}$=

A. $e^{\frac{3}{2}}$

B. $e^{\frac{2}{3}}$

C. $e^{\frac{1}{6}}$

D. e^{6}

2. 设函数 y=x+2sinx，则 dy=

A. (1-2cosx)dx

B. (1+2cosx)dx

C. (1-cosx)dx

D. (1+cosx)dx

3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x^2-x+2}$ =

A. $\frac{3}{2}$

B. 1

C. 2

D. $\frac{1}{2}$

4. 设函数 $f(x)=3+x^5$，则 $f'(x)$=

A. x^4

B. $1+x^4$

C. $\frac{1}{5}x^4$

D. $5x^4$

5. 设函数 f(x)=2lnx，则 $f''(x)$=

A. $\frac{2}{x^2}$

B. $-\frac{2}{x^2}$

C. $\frac{1}{x^2}$

D. $-\frac{1}{x^2}$

6. $\int_{-2}^{2}(1+x)dx=$

A.4

B.0

C.2

E. - 4

7. $\int \frac{3}{x^5}dx =$

A. $\frac{3}{4x^4}+C$

B. $\frac{3}{5x^4}+C$

C. $-\frac{3}{4x^4}+C$

D. $-\frac{3}{5x^4}+C$

8. 把 3 本不同的语文书和 2 本不同的英语书排成一排，则 2 本英语书卡好相邻的概率为

A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{1}{2}$

9. 设函数 $z=x^2-4y^2$，则 dz=

A. xdx-4ydy

B. xdx-ydy

C. 2xdx-4ydy

D. 2xdx-8ydy

10. 设函数 $z=x^3+xy^2+3$，则$\frac{\partial z}{\partial y}=$

A.$3x^2+2xy$

B.$3x^2+y^2$

C.2xy

D.2y

二、填空题（11~20 小题，每小题 4 分，共 40 分）

11. 设函数 $y=e^{2x}$，则 dy=__________.

12. 函数 $f(x)=x^3-6x$ 的单调递减区间为____________.

13. 若函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-2, & x\le 0, \\ a+\sin x, & x>0, \end{cases}$ 在 x=0 处连续，则 a=___________.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=$ ___________.

15. $\int (3x+2\sin x)dx =$ ____________.

16. 曲线 $y=\arctan(3x+1)$在点$(0,\frac{\pi}{4})$处切线的斜率为__________.

17. $(\int_0^{2x}\sin t^2\,dt)' =$ _____________.

18. $\int_{-\infty}^{1} e^x\,dx =$ __________.

19. 区域 D={(x,y)|$1 \le x \le 2$, $1 \le y \le x^2$}的面积为__________.

20. 方程$y^3 + lny - x^2 = 0$ 在点（1，1）的某领域确定隐函数 y=y(x)，则$\frac{dy}{dx}|_{x=1}$ =________.

三、解答题（21~28 题，共 70 分。解答应写出推理、演算步骤）

21、（本题满分 8 分）

计算$\int xsinxdx.$

22、（本题满分 8 分）

计算$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cosx-x^2}{2sin^2x}$.

23、（本题满分 8 分）

已知函数 $f(x) = e^x cosx$，求 $f''(\frac{\pi}{2})$.

24、（本题满分 8 分）

计算$\int_0^1 \sqrt[3]{1+x}dx.$

25、（本题满分 8 分）

设 D 为曲线 y=$\sqrt{x}$，直线 x=4，x 轴围成的有界区域，求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

26、（本题满分 10 分）

求函数 z=$x^2 + 2y^4 + 4xy^2 - 2x$的极值。

27、（本题满分 10 分）

求曲线 y=$x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ 的凹凸区间与拐点。

28、（本题满分 10 分）

已知离散型随机变量 X 的概率分布为

X	-1	0	2
P	a	0.5	b

且 E（X）=0.

(1) 求 a,b;

(2) 求 E[X(X+1)]

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】B

【考情点拨】本题考查了函数极限的知识点。

【应试指导】$\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{3x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot\frac{2}{3}}=[\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^{\frac{2}{3}}=e^{\frac{2}{3}}$.

2. 【答案】B

【考情点拨】本题考查了函数微分的知识点。

【应试指导】y'=(x+2sinx)'=1+2cosx，故 dy=y'dx=(1+2cosx)dx.

3. 【答案】A

【考情点拨】本题考查了分式函数的极限的知识点.

【应试指导】$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x^2-x+2}=\frac{1^2+1+1}{1^2-1+2}=\frac{3}{2}$

4. 【答案】D

【考情点拨】本题考查了一阶导数的知识点。

【应试指导】f'(x)=(3+x^5)'=5x^4

5. 【答案】B

【考情点拨】本题考查了二阶导函数的知识点。

【应试指导】f'（x）=(2lnx)'=$\frac{2}{x}$，f''(x)=($\frac{2}{x}$)' =$-\frac{2}{x^2}$

6. 【答案】A

【考情点拨】本题考查了牛顿--莱布尼兹公式的知识点。

【应试指导】$\int_{-2}^{2}(1+x)dx=(x+\frac{1}{2}x^2)|_{-2}^{2}=4$

7. 【答案】C

【考情点拨】本题考查了不定积分的知识点

【应试指导】$\int\frac{3}{x^5}dx=3\times\frac{1}{-5+1}x^{-5+1}+C=-\frac{3}{4x^4}+C$

8. 【答案】A

【考情点拨】本题考查了随机事件的概率的知识点

【应试指导】2 本英语书恰好相邻的概率为$\frac{A_4^4\cdot A_2^2}{A_5^5}=\frac{2}{5}$

9. 【答案】D

【考情点拨】本题考查了全微分的知识点

【应试指导】易知$\frac{\partial z}{\partial x}=2x$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-8y$，故 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=2xdx-8ydy$

10. 【答案】C

【考情点拨】本题考查了函数的偏导数的知识点

【应试指导】$\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot(y^2)'=2xy$

二、填空题

11. 【答案】$2e^{2x}dx$

【考情点拨】本题考查了函数微分的知识点

【应试指导】$y' = (e^{2x})' = 2e^{2x}$，故 $dy = y'dx = 2e^{2x}dx$
12. 【答案】$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
【考情点拨】本题考查了函数的单调性知识点
【应试指导】易知 $f'(x)=3x^2-6$，令 $f'(x)<0$，则有$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$，故 f(x)的单调递减区间为$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
13. 【答案】-2
【考情点拨】本题考查了分段函数连续性的知识点
【应试指导】由于 f(x)在 x=0 处连续，故有 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$，而$f(0) =-2$，

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2-2) = -2$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (a+sinx) = a$，因此$a =-2$
14. 【答案】1
【考情点拨】本题考查了函数极限的知识点
【应试指导】$x \to 0$ 时，$x^2 \to 0$，故有$\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx^2}{x^2} = 1$
15. 【答案】$\frac{3}{2}x^2 - 2cosx + C$
【考情点拨】本题考查了不定积分的知识点
【应试指导】$\int (3x+2sinx)dx = \frac{3}{2}x^2 - 2cosx + C$
16. 【答案】$\frac{3}{2}$
【考情点拨】本题考查了函数切线的知识点
【应试指导】$y' = [\arctan(3x+1)]' = \frac{3}{1+(3x+1)^2}$，故曲线在点（0，$\frac{\pi}{4}$）处的切线斜率为

$y'|_{x=0} = \frac{3}{1+(3x+1)^2}|_{x=0} = \frac{3}{2}$
17. 【答案】$2sin(4x^2)$
【考情点拨】本题考查了定积分的性质的知识点
【应试指导】$(\int_0^{2x} sint^2\,dt)'=sin(2x)^2\cdot(2x)' = 2sin(4x)^2$
18. 【答案】e
【考情点拨】本题考查了反常积分的知识点
【应试指导】$\int_{-\infty}^{1} e^x\,dx = e^x|_{-\infty}^{1} = e - 1 = e$
19. 【答案】$\frac{4}{3}$
【考情点拨】本题考查了定积分的应用的知识点
【应试指导】区域 D 的面积为$\int_1^2 (x^2-1)\,dx = (\frac{1}{3}(x^3-x)|_1^2 = \frac{4}{3}$
20. 【答案】$\frac{1}{2}$
【考情点拨】本题考查了隐函数求导的知识点
【应试指导】方程两边对 x 求导，得 $3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} - 2x = 0$，即$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{3y^3+1}$，故有$\frac{dy}{dx}|_{x=1} =$

$\frac{xy}{3y^3+1}|_{x=1} = \frac{2\times1\times1}{3\times1^3+1} = \frac{1}{2}$

三、解答题

21. $\int xsinxdx = -\int xd(cosx) = -(xcosx - \int cosxdx) = -xcosx + \int cosxdx = -xcos + sinx + C$

22. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-cosx-x^2}{2sin^2x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{1-cosx}{2sin^2x} - \lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{2sin^2x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x^2} - \lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

23. $f'(x) = e^x cosx + e^x\cdot(cosx)' = e^x cosx + e^x sinx = e^x(cosx - sinx)$,

$f''(x) = e^x(cosx - sinx) + e^x(cosx - sinx)' = e^x(cosx - sinx) + e^x(-sinx - cosx) = -2e^x sinx$

故有 $f''(\frac{\pi}{2}) = -2e^{\frac{\pi}{2}}sin\frac{\pi}{2} = -2e^{\frac{\pi}{2}}$

24. $\int_0^1 \sqrt[3]{1+x}dx = \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{3}}d(x+1) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}}(1+x)^{\frac{1}{3}+1}|_0^1 = \frac{3}{4}(1+x)^{\frac{4}{3}}|_0^2 = \frac{3}{4}(2^{\frac{4}{3}}-1)$

25. 区域 D：$0\le y \le 2$，$y^2 \le x \le 4$,

故所求旋转体的体积$=\pi\cdot4^2\cdot2 - \int_0^2 \pi x^2dy = 32\pi - \int_0^2 \pi y^4dy = 32\pi - \frac{\pi}{5}y^5|_0^2 = \frac{128}{5}\pi$

26. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y^2 - 2$，$.\frac{\partial z}{\partial y} = 8y^3 + 8xy$,

令$\frac{\partial z}{\partial x}=0$，$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$,

得驻点为（1，0），（1，1），（-1，-1）

而$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 8y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24y^2 + 8x$,

在（1，0）点，$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}|_{(1,0)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{(1,0)} = 0, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}|_{(1,0)} =8$

$B^2-AC=-16<0$,且 $A>0$,

故函数在（1，0）点有极小值，$z_{极小值}=-1$;

在（1，0）点，$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}|_{(1,-1)} = 2$，$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{(-1,1)} = 8$，$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}|_{(-1,1)} =16$，

$B^2-AC=32>0$,故点（-1，1）不是极值点;

在（-1，-1）点，$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}|_{(-1,-1)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{(-1,-1)} = -8, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}|_{(-1,-1)} =16$

$B^2-AC=32>0$,故点（-1，-1）不是极值点.

因此函数在（1，0）点有极小值，$z_{极小值}=-1$

27. $y' = 3x^2 - 6x + 2, y'' = 6x - 6$,

令 $y''=0$,得 $x=1$.

当 $x>1$ 时，$y''>0$,故（1，+∞）为曲线的凹区间;

当 $x<1$ 时，$y''<0$,故（-∞，1）为曲线的凸区间，

函数的拐点为（1，1）.

28. （1）由概率的性质可知 $a+0.5+b=1$,

又 E（X）=0，得$-1\times a + 0\times0.5 + 2\times b = 0$,

故有 a=$\frac{1}{3}$，b=$\frac{1}{6}$

（2）E[X(X+1)]=E(X^2+X)=E(X^2)+E(x),

而 E（X^2）=D(X)+[E(X)]^2=$\frac{1}{3}\cdot(-1-0)^2+\frac{1}{2}\cdot(0-0)^2+\frac{1}{6}\cdot(2-0)^2$

因此 E[X(X+1)]=1+0=1