

第 I 卷(选择题,共 85 分)

一、选择题(本大题共 17 小题,每小题 5 分,共 85 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1.不等式 $|x-2|<1$ 的解集是

- A. $\{x \mid -1 < x < 3\}$
- B. $\{x \mid -2 < x < 1\}$
- C. $\{x \mid -3 < x < 1\}$
- D. $\{x \mid 1 < x < 3\}$

2.下列函数中,在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 为减函数的是

- A. $y = \ln(3x+1)$
- B. $y = x+1$
- C. $y = 5\sin x$
- D. $y = 4-2x$

3.函数 $y = \log_2(x+1)$ 的定义域是

- A. $(2, +\infty)$
- B. $(-2, +\infty)$
- C. $(-\infty, -1)$
- D. $(-1, +\infty)$

4.直线 $x-y-3=0$ 与 $x-y+3=0$ 之间的距离为

- A. $2\sqrt{2}$
- B. $6\sqrt{2}$
- C. $3\sqrt{2}$
- D. 6

5.设集合 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $N = \{x \mid x \leq 2\}$, 则 $M \cap N =$

- A. $\{-1, 0, 1\}$
- B. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
- C. $\{x \mid 0 < x \leq 2\}$
- D. $\{x \mid -1 < x < 2\}$

6.已知点 $A(1,0), B(-1,1)$, 若直线 $kx-y-1=0$ 与直线 AB 平行, 则 $k =$

- A. $-\frac{1}{2}$
- B. $\frac{1}{2}$
- C. -1
- D. 1

7.已知向量 $\overrightarrow{AB} = (1, t)$, $\overrightarrow{BC} = (-1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 2)$, 则 $t =$

- A. -1
- B. 2
- C. -2
- D. 1

8.已知双曲线 $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的离心率为 3, 则 $m =$

- A. 4

B.1

C. $\frac{1}{2}$

D.2

9.函数 $y=\sin(x+3) + \sin(x-3)$ 的最大值为

A.-2sin3

B.2sin3

C.-2cos3

D.2cos3

10.已知 $a>b>1$,则

A. $\log_2 a > \log_2 b$

B. $\log_{\frac{1}{2}} a > \log_{\frac{1}{2}} b$

C. $\frac{1}{\log_2 a} > \frac{1}{\log_2 b}$

D. $\log_{\frac{1}{2}} a > \log_{\frac{1}{2}} b$

11.已知 $\cos x = \frac{3}{5}$,且 x 为第一象限角,则 $\sin 2x =$

A. $\frac{4}{5}$

B. $\frac{24}{25}$

C. $\frac{18}{25}$

D. $\frac{12}{25}$

12.曲线 $y = \sin(x+2)$ 的一条对称轴的方程是

A. $x = \frac{\pi}{2}$

B. $x = \pi$

C. $x = \frac{\pi}{2} + 2$

D. $x = \frac{\pi}{2} - 2$

13.若 $p:x=1$; $q:x^2-1=0$,则

A. p 既不是 q 的充分条件也不是 q 的必要条件

B. p 是 q 的充要条件

C. p 是 q 的必要条件但不是充分条件

D. p 是 q 的充分条件但不是必要条件

14.已知点 $A(1,-3), B(0, -3), C(2,2)$.则 ΔABC 的面积为

A.2

B.3

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{5}{2}$

15. 从红、黄、蓝、黑 4 个球中任取 3 个, 则这 3 个球中有黑球的不同取法共有

- A. 3 种
- B. 4 种
- C. 2 种
- D. 6 种

16. 下列函数中, 最小正周期为 π 的函数是

- A. $y = \sin x + \sin x^2$
- B. $y = \sin 2x$
- C. $y = \cos x$
- D. $y = \sin \frac{x}{2} + 1$

17. 下列函数中, 为偶函数的是

- A. $y = e^x + x$
- B. $y = x^2$
- C. $y = x^3 + 1$
- D. $y = \ln(2x + 1)$

第 II 卷 (非选择题, 共 65 分)

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

18. 函数 $f(x) = x^2 + bx + c$ 的图像经过点 $(-1, 0)$, $(3, 0)$. 则 $f(x)$ 的最小值为_____.

19. 某同学每次投篮命中的概率都是 0.6, 各次是否投中相互独立, 则该同学投篮 3 次恰有 2 次投中的概率是_____.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $\frac{3^n}{2}$, 则 $a_3 =$ _____.

21. 已知曲线 $y = \ln x + a$ 在点 $(1, a)$ 处的切线过点 $(2, -1)$, 则 $a =$ _____.

三、解答题 (本大题共 4 小题, 共 49 分. 解答应写出推理、演算步骤)

22. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $A = 30^\circ$, $AB = \sqrt{3}$, $BC = 1$.

- (I) 求 C ;
- (II) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

23. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = x^3 + x - 1$.

- (I) 求 $f(x)$ 的单调区间;
- (II) 求出一个区间 (a, b) , 使得 $f(x)$ 在区间 (a, b) 存在零点, 且 $b - a < 0.5$.

24. (本小题满分 12 分)

已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_2 = -2$, $a_4 = -1$.

- (I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (II) 求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

25. (本小题满分 13 分)

已知椭圆 E 的中心在坐标原点 O , 焦点在 x 轴上, 长轴长为 8, 焦距为 $2\sqrt{7}$.

- (I) 求 E 的标准方程;
- (II) 若以 O 为圆心的圆与 E 交于四点, 且这四点为一个正方形的四个顶点, 求该圆的半径.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】D

【考情点拨】本题主要考查的知识点为绝对值不等式.

【应试指导】 $|x-2|<1 \rightarrow -1 < x < 3 \rightarrow 1 < x < 3$, 故不等式的解集为 $\{x|1 < x < 3\}$.

2. 【答案】D

【考情点拨】本题主要考查的知识点为函数的单调性.

0,哥)上为增函数,只有D选项在实数域上为减

【应试指导】A、B选项在其定义域上为增函数,选项C在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上为增函数.只有D选项在

实数域上为减区间.

3. 【答案】D

【考情点拨】本题主要考查的知识点为对数函数的性质.

【应试指导】由对数函数的性质可知 $x+1>0 \rightarrow x>-1$,故函数的定义域为 $(-1, +\infty)$.

4. 【答案】C

【考情点拨】本题主要考查的知识点为直线间的距离.

【应试指导】由题可知,两直线平行,故两直线的距离即为其中一条直线上一点到另一条直线的

距离.取直线 $x-y-3=0$ 上一点 $(4,1)$,点 $(4,1)$ 到直线 $x-y+3=0$ 的距离为 $d=\frac{4-1+3}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$

5. 【答案】B

【考情点拨】本题主要考查的知识点为集合的运算.

【应试指导】由于 $M \subseteq N$,故 $M \cap N = M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

6. 【答案】A

【考情点拨】本题主要考查的知识点为直线的斜率.

而直线 $kx - y - 1 = 0$ 的斜率为 k ,故 $k = -1$

【应试指导】两直线平行则其斜率相等, $k_{AB} = \frac{1-0}{-1-1} = -\frac{1}{2}$,而直线 $kx - y - 1 = 0$ 的斜率为 k ,故 $k = -\frac{1}{2}$

7. 【答案】D

【考情点拨】本题主要考查的知识点为向量的运算.

【应试指导】 $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} = (1,1) + (-1,1) = (0,2)$,故有 $t+1=2 \rightarrow t=1$.

8. 【答案】C

【考情点拨】本题主要考查的知识点为双曲线.

【应试指导】由题知, $a^2 = m, b^2 = 4, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{m+4}$,其离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{m+4}}{\sqrt{m}} = 3$,故 $m = \frac{1}{2}$.

9. 【答案】D

【考情点拨】本题主要考查的知识点为三角函数的运算.

【应试指导】 $y = \sin x \cos 3 + \cos x \sin 3 + \sin x \cos 3 - \cos x \sin 3 = 2 \sin x \cos 3$, $\sin x$ 的最大值为1,故原函数的最大值为 $2 \cos 3$.

10. 【答案】A

【考情点拨】本题主要考查的知识点为对数函数的性质.

【应试指导】函数 $y = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,由于 $a > b > 1$,故有 $\log_2 a > \log_2 b$.

11. 【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数.

【应试指导】 由于 x 为第一象限角, 故 $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$, 因此 $\sin 2x =$

$2\sin x \cos x =$

$$2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}.$$

12. 【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的性质.

【应试指导】 $y = \sin(x+2)$ 是函数 $y = \sin x$ 向左平移 2 个单位得到的, 故其对称轴也向左平移 2 个单位, $x = \frac{\pi}{2}$ 是函数 $y = \sin x$ 的一个对称轴, 因此 $x = \frac{\pi}{2} - 2$ 是 $y = \sin(x+2)$ 的一条对称轴.

13. 【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为简易逻辑.

【应试指导】 $x = 1 \rightarrow x^2 - 1 = 0$, 而 $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = 1$ 或 $x = -1$, 故 p 是 q 的充分但不必要条件.

14. 【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为解三角形.

【应试指导】 易知 $AB = 1$, 点 C 到 AB 边的距离为 $2+3=5$, 故 AB 边的高为 5, 因此三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times 1 \times 5 = \frac{5}{2}$.

15. 【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为随机事件.

【应试指导】 3 个球中有黑球的取法有 $C_1^1 \cdot C_3^2 = 3$ 种.

16. 【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的性质.

【应试指导】 B 项中, 函数的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

17. 【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的奇偶性.

【应试指导】 A、C、D 项为非奇非偶函数, B 项为偶函数.

二、填空题

18. 【答案】 -4

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为一元二次函数的性质.

【应试指导】 由于函数开口向上, 故其在对称轴处取得最小值, 又函数过点 $(-1, 0), (3, 0)$, 故其对称轴为 $x = \frac{-1+3}{2} = 1$, $f_{\min}(1) = 1 + b + c$, 而 $f(-1) = 1 - b + c = 0$, $f(3) = 9 + 3b + c = 0$, 得 $b = -2, c = -3$, 故 $f_{\min}(1) = 1 - 2 - 3 = -4$.

19. 【答案】 0.432

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为随机事件的概率.

【应试指导】 投篮 3 次恰有 2 次投中的概率为 $C_3^2 \cdot 0.6^2 \cdot 0.4 = 0.432$.

20. 【答案】 9

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为数列的性质.

【应试指导】 由题知 $S_n = \frac{3^n}{2}$, 故有 $a_1 = \frac{3}{2}, a_2 = S_2 - a_1 = \frac{3^2}{2} - \frac{3}{2} = 3, a_3 = S_3 - a_2 - a_1 = \frac{3^3}{2} - 3 - \frac{3}{2} = 9$.

21. 【答案】 -2

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为曲线的切线.

【应试指导】 $y' = \frac{1}{x}$, 故曲线在点 $(1, a)$ 处的切线的斜率为 $y'|_{x=1} = \frac{1}{x}|_{x=1} = 1$, 因此切线方程为 $y - a = x - 1$, 即 $y = x - 1 + a$. 又切线过点 $(2, -1)$, 因此有 $-1 = 2 - 1 + a$, 故 $a = -2$.

三、解答题

22. (I) 由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$,

$$\text{即 } \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sin C}, \text{ 解得 } \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

故 $C = 60^\circ$ 或 120° .

(II) 由余弦定理得 $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{3 + AC^2 - 1}{2\sqrt{3}AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

解得 $AC = 1$ 或 $AC = 2$.

$$\text{当 } AC = 1 \text{ 时, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{当 } AC = 2 \text{ 时, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 2 \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

23. (I) $f'(a) = 3x^2 + 1 > 0$,

故函数在 \mathbb{R} 上单调递增, 故其单调区间为 \mathbb{R} .

(II) 令 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{4}$, 则有

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1 < 0, \quad f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{64} + \frac{3}{4} - 1 > 0$$

又由于函数在 \mathbb{R} 上单调递增, 故其在 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ 内存在零点,

且 $b - a = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} < 0.5$ (答案不唯一)

24. (I) 由题可知

$$a_4 = a_2 + 2d = -2 + 2d = -1,$$

可得 $d = \frac{1}{2}$.

$$\text{故 } a_n = a_2 + (n-2)d = -2 + (n-2) \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2} - 3$$

(II) 由(I)可知 $a_1 = \frac{1}{2} \times 1 - 3 = -\frac{5}{2}$,

$$\text{故 } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(-\frac{5}{2} + \frac{n}{2} - 3)}{2} = \frac{1}{4}n(n - 11)$$

25. (I) 由题知 $2a = 8, 2c = 2\sqrt{7}$,

$$\text{故 } a = 4, c = \sqrt{7}, b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{16 - 7} = 3,$$

因此椭圆方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

(II) 设圆的方程为 $x^2 + y^2 = R^2$,

因为圆与椭圆的四个交点为一正方形的顶点, 设其在第一象限的交点为 A , 则有 $OA = R$, A 点到 x 轴与 y 轴的距离相等,

可求得 A 点的坐标为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}R, \frac{\sqrt{2}}{2}R)$,

而 A 点也在椭圆上,故有 $\frac{R^2}{16} + \frac{R^2}{9} = 1$

解得 $R = \frac{12\sqrt{2}}{5}$.

